محتويات الكتاب



أولًا الجبر والإحصاء



الوحدة 1 الأعـداد والجبر



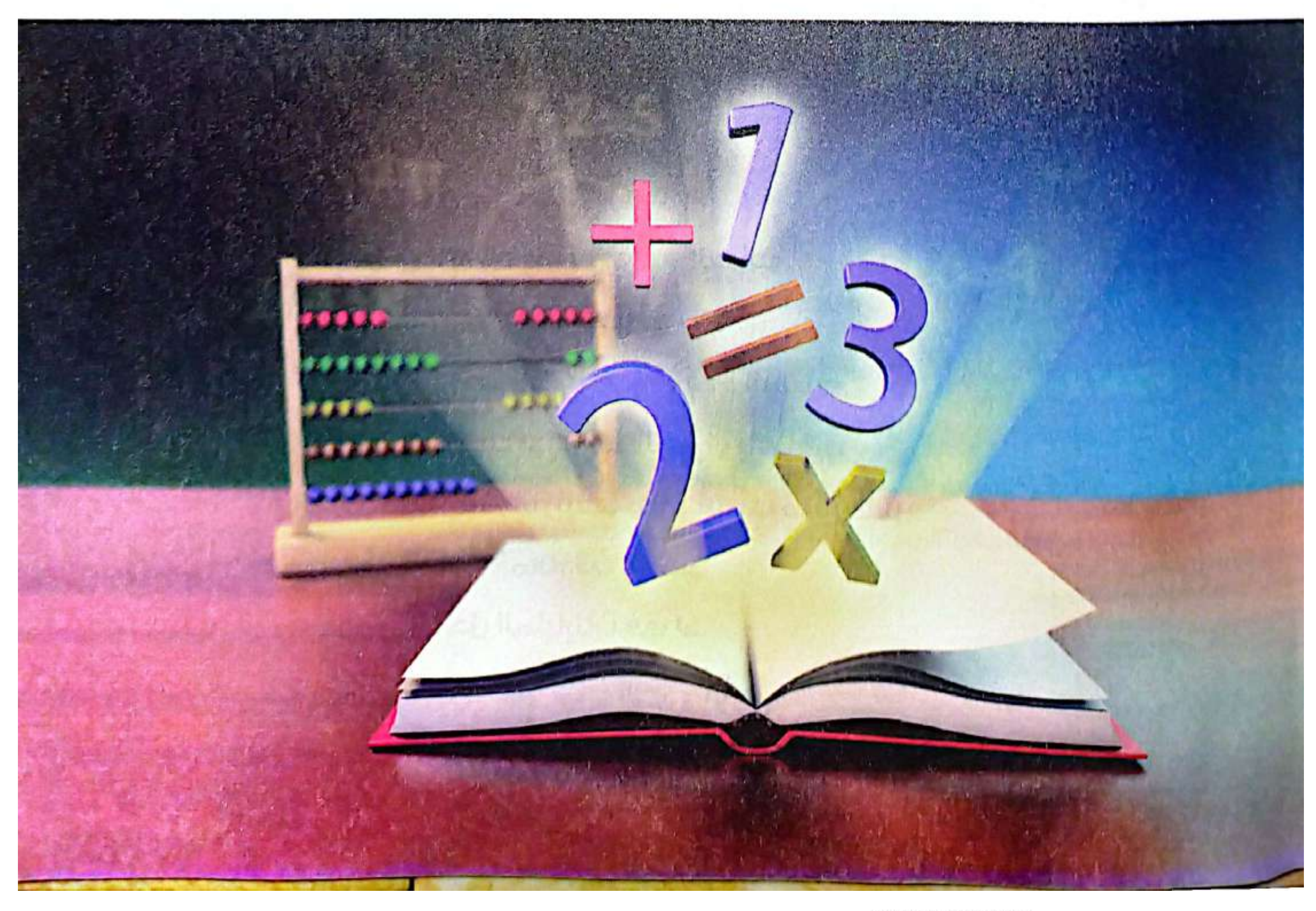
الوحدة 2 الإحصاء والاحتمال

ثانيًا الهندسة والقياس



الوحدة 3 الهندسة والقياس

أولًا الجبر والإحصاء



الوحدة 1

الأعداد والجبر

دروس الوحدة :

الدرس 1 الضرب المتكرر فى ن.

الدرس 2 القوى الصحيحة غير السالبة .

الدرس 3 القوى الصحيحة السالبة .

الدرس 4 الصورة القياسية للعدد النسبى.

الدرس 5 ترتيب إجراء العمليات الرياضية .

الدرس 6 الجذر التربيعى لعدد نسبى مربع كامل.

الدرس 7 حل المعادلات فى ن.

الدرس 8 حل المتباينات فى ن.

مشروع بحثى على الوحدة الأولى



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

أهداف الوحدة :

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يستدعى ما سبق دراسته على موضوع الضرب المتكرر فى ص.
- يضرب ضربًا متكررًا للأعداد النسبية.
- يتعرف قوانين الأسس فى ن.
- يتعرف الأس السالب لعدد نسبى لا يساوى الصفر.
- يتعرف الصورة القياسية للعدد النسبى.
- يكتب عددًا نسبيًا على الصورة القياسية.
- يجرى العمليات الرياضية وفق أولوية إجرائها.
- يتعرف الجذر التربيعى لعدد نسبى مربع كامل.
- يوجد الجذر التربيعى لعدد نسبى مربع كامل.
- يحل معادلة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد فى ن.
- يستخدم المعادلات فى حل المسائل اللفظية.
- يحل متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ن.

غياث الدين بن مسعود الكاشى



غياث الدين بن مسعود الكاشى

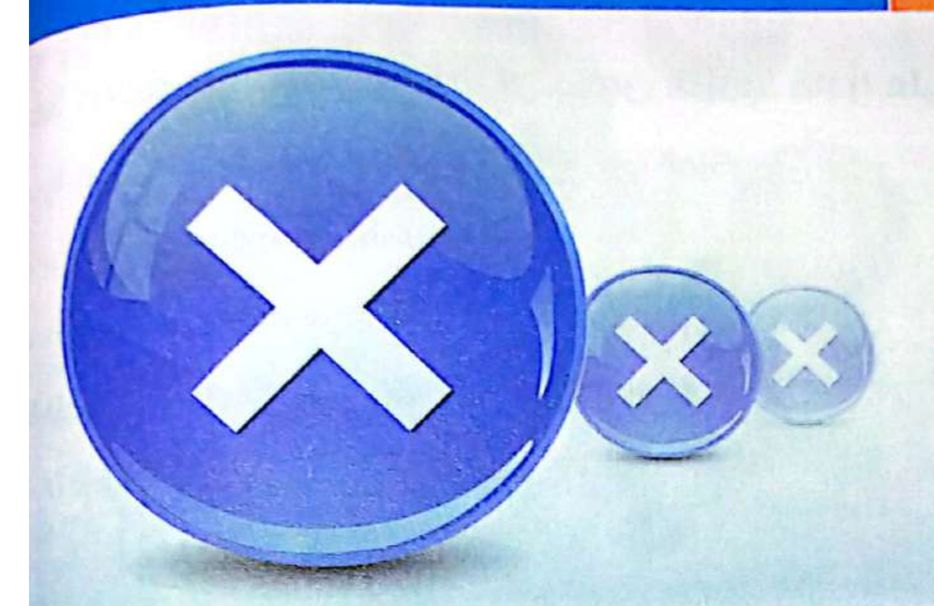
(سنة ١٣٨٠م / ١٤٣٦م)

عالم عربى له إسهامات كثيرة فى علم الرياضيات فقد قام بما يأتى :

- ابتكر الكسر العشرى.
- وضع قانونًا خاصًا بمجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى القوة الرابعة.
- توصل إلى قيمة للنسبة التقريبية (π) تقترب جدًا إلى ما توصلنا إليه باستخدام الحاسبات العلمية.

الدرس 1

الضرب المتكرر فى ن



* سبق لك دراسة الضرب المتكرر فى الأعداد الصحيحة وعلمت أن :

$٣^٤ = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣$ «حيث نجد أن : ٣ تكررت كعامل ٤ مرات»

* ويمكن أيضًا تطبيق ما سبق على الكسور الاعتيادية.

فمثلًا : $\left(\frac{٢}{٣}\right)^٤ = \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣}$

* ومن ضرب الكسور الاعتيادية نجد أن :

$\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}{٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣} = \frac{٢^٤}{٣^٤}$ أى أن : $\left(\frac{٢}{٣}\right)^٤ = \frac{٢^٤}{٣^٤}$

وبصفة عامة

إذا كان : $\frac{أ}{ب}$ عددًا نسبيًا ، $ن$ عددًا صحيحًا موجبًا فإن :

$\left(\frac{أ}{ب}\right)^ن = \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} \times ... \times \frac{أ}{ب}$ حيث $\frac{أ}{ب}$ مكرر كعامل $ن$ من المرات

ويُقرأ : « $\frac{أ}{ب}$ أس $ن$ أو القوة النونية للعدد $\frac{أ}{ب}$ » أى أن : $\left(\frac{أ}{ب}\right)^ن = \frac{أ^ن}{ب^ن}$

فمثلًا : • $\left(\frac{٢}{٥}\right)^٣ = \frac{٢^٣}{٥^٣} = \frac{٨}{١٢٥}$ • $(٠,٧)^٢ = \left(\frac{٧}{١٠}\right)^٢ = \frac{٧^٢}{(١٠)^٢} = \frac{٤٩}{١٠٠}$

ملاحظة

إذا كان : $\frac{أ}{ب}$ عددًا نسبيًا فإن : $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{صفر} = ١$ حيث : $أ \neq$ صفر

فمثلًا : • $\left(\frac{١}{٥}\right)^{صفر} = ١$ • $\left(-\frac{٣}{٧}\right)^{صفر} = ١$

ملاحظة

إذا كان : أ عددًا نسبيًا ، م عددًا صحيحًا موجبًا

فإن

- $(-أ)^{م} = (أ)^{م}$ عندما تكون م عددًا زوجيًا.
  فمثلًا : $\left(-\frac{١}{٢}\right)^{٤} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} = \frac{١}{١٦}$
- $(-أ)^{م} = -(أ)^{م}$ عندما تكون م عددًا فرديًا.
  فمثلًا : $\left(-\frac{١}{٢}\right)^{٣} = -\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} = -\frac{١}{٨}$

مثال ١

أوجد فى أبسط صورة ناتج كل مما يأتى :

١ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \times \frac{٩}{٤}$

٢ $\left(-\frac{٥}{٤}\right)^{٢} \times \left(\frac{٢}{٥}\right)^{٤}$

٣ $\left(٣\frac{١}{٢}\right)^{٢} \div \left(-\frac{١}{٢}١٠\right)$

٤ $\left(-\frac{٢}{٥}\right)^{٢} \times \left(-\frac{٥}{٢}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٥}\right)^{صفر}$

الحل

١ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \times \frac{٩}{٤} = \frac{٢^{٢}}{٣^{٢}} \times \frac{٩}{٤} = \frac{٤}{٩} \times \frac{٩}{٤} = ١$

٢ $\left(-\frac{٥}{٤}\right)^{٢} \times \left(\frac{٢}{٥}\right)^{٤} = \frac{٥^{٢}}{٤^{٢}} \times \frac{٢^{٤}}{٥^{٤}} = \frac{٢٥}{١٦} \times \frac{١٦}{٦٢٥} = \frac{١}{٢٥}$

٣ $(3\frac{1}{2})^{2} \div (-10\frac{1}{2}) = (\frac{7}{2})^{2} \div (-\frac{21}{2}) = \frac{7^{2}}{2^{2}} \times (-\frac{2}{21}) = \frac{49}{4} \times (-\frac{2}{21}) = -\frac{7}{6}$

٤ $(-\frac{2}{5})^{2} \times (-\frac{5}{2})^{3} \times (\frac{1}{5})^{\text{صفر}} = \frac{2^{2}}{5^{2}} \times (-\frac{5^{3}}{2^{3}}) \times 1 = \frac{4}{25} \times (-\frac{125}{8}) = -\frac{5}{2}$

حاول بنفسك ١

أوجد فى أبسط صورة كلًا مما يأتى :

١ $(\frac{1}{5})^{2}$ ٢ $(-\frac{2}{3})^{3}$

٣ $(-\frac{4}{5})^{4}$ ٤ $(1\frac{1}{2})^{4}$

٥ $(-\frac{3}{9})^{2} \times (\frac{9}{4})^{2} \times (\frac{81}{16})^{\text{صفر}}$

الإجابات النهائية لأسئلة حاول بنفسك تجدها نهاية كل درس للتأكد من إجابتك.

مثال ٢

إذا كان : $\text{س} = -\frac{1}{2}$ ، $\text{ص} = \frac{1}{4}$ ، $\text{ع} = 4$

فأوجد القيمة العددية للمقدار : $(\text{س} + \text{ص})^{3} \times \text{ع}^{3}$

الحـــل

$(\text{س} + \text{ص})^{3} \times \text{ع}^{3} = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{4})^{3} \times 4^{3} = (-\frac{2}{4} + \frac{1}{4})^{3} \times 4^{3}$

$= (-\frac{1}{4})^{3} \times 4^{3} = -\frac{1}{4^{3}} \times 4^{3} = -1$

حاول بنفسك ٢

إذا كان : $\text{س} = -\frac{2}{3}$ ، $\text{ص} = \frac{1}{2}$ ، $\text{ع} = -\frac{4}{3}$ فأوجد قيمة : $\text{س}^{2} - \text{ص}^{2}\,\text{ع}$

فى نهاية كل درس ستجد الإجابات النهائية لأسئلة حاول بنفسك بنفس هذا الشكل



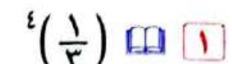
تمارين 1

على الضرب المتكرر فى ن



● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ احسب كلاً مما يأتى مع وضع الناتج فى أبسط صورة :

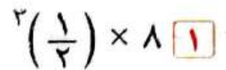


١ $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٤}$ ٢ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}$ ٣ $\left(-\frac{١}{٧}\right)^{٣}$

٤ $\left(-\frac{٣}{٤}\right)^{٤}$ ٥ $\left(\frac{٥}{٩}\right)^{\text{صفر}}$ ٦ $\left(-٢\frac{١}{٢}\right)^{٣}$

٧ $(٠,٠٤)^{٢}$ ٨ $(١,٥)^{٣}$ ٩ $(-٢,٣)^{٢}$

٢ أوجد قيمة كل مما يأتى مع وضع الناتج فى أبسط صورة :



١ $٨ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$ ٢ $\left(-\frac{٣}{٤}\right)^{٢} \times \frac{٨}{٢٧}$

٣ $\left(-\frac{٣}{٥}\right)^{٣} \times \left(-\frac{٢٥}{٢٧}\right)$ ٤ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} \div \left(-\frac{٩}{١٢٥}\right)$

٥ $\left(\frac{٤}{٣}\right)^{٢} \times \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٣}$ ٦ $\left(-\frac{٥}{٦}\right)^{٢} \div ٣\frac{٣}{٤}$

٧ $\left(٢\frac{١}{٢}\right)^{٢} \times \frac{٤}{٢٥}$ ٨ $٢\frac{٧}{٩} \div \left(-١\frac{٢}{٣}\right)^{٢}$

٣ أوجد قيمة كل مما يأتى مع وضع الناتج فى أبسط صورة :

١ $\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} \times \frac{٥}{١٦} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{صفر}}$ ٢ $\frac{٣}{٤} \times \left(-\frac{٢}{٣}\right)^{٣} \times \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$

٣ $\left(-\frac{٥}{٣}\right)^{٤} \times \left(-\frac{٣}{٥}\right)^{٣} \times (-١)^{٧}$ ٤ $\left(-\frac{٢}{٣}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} \div \left(-\frac{٢}{٩}\right)^{٢}$

٥ $\left[\left(\frac{٥}{٢}\right)^{٣} \div \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٤}\right] \times \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٣}$ ٦ $\left(-\frac{١}{٢}\right)^{٣} \div \left[٨ \times \left(-\frac{١}{٢}\right) \times \frac{٣}{٤}\right]$

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ المعكوس الضربى للعدد $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{\text{صفر}}$ هو ....

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) $-\frac{٢}{٥}$ (جـ) ١   (د) صفر

٢ المعكوس الجمعى للعدد $(-٣)^{صفر}$ هو ....

(أ) ١ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) − $(٣)^{صفر}$

٣ المعكوس الضربى للعدد $(-١)^{٣}$ هو ....

(أ) $(-١)^{٣}$ (ب) $(-١)^{٢}$ (جـ) $١^{٣}$ (د) $١^{٢}$

٤ المعكوس الجمعى للعدد $\left(-\frac{٢}{٥}\right)^{٢}$ هو ....

(أ) $\frac{٤}{٢٥}$ (ب) $-\frac{٤}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٢٥}{٤}$ (د) $-\frac{٢٥}{٤}$

٥ $\left(\frac{١}{٤}\right)^{صفر} + \frac{١}{٤} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٤}$

٦ $\left(\frac{٥}{٣}\right)^{٢} \times \left(\frac{٣}{٥}\right)^{صفر} =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{٢٥}{٩}$ (جـ) صفر (د) ١

٧ إذا كان : س = ص فإن : $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{س - ص} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ١ (د) صفر

٨ $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{٢} \times \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}} =$ .... (حيث أ ≠ صفر ، ب ≠ صفر)

(أ) أ ب (ب) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{٤}$ (جـ) $(أ ب)^{صفر}$ (د) $\frac{أ}{ب}$

٩ إذا كان : س = $-\frac{١}{٢}$ ، ص = ٣ فإن : $س^{ص} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $-\frac{١}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $-\frac{١}{٦}$

١٠ إذا كان : $ص^{٢٦} + ص^{٢٧} =$ صفر فإن : ص = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) −٢

٥ أكمل ما يأتى :

[١] $\frac{٨}{٢٧} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{.....}$

[٢] $\frac{٩}{١٦} = \left(\frac{٣}{٤}\right)^{.....}$

[٣] $-\frac{٦٤}{١٢٥} = \left(-\frac{٤}{٥}\right)^{.....}$

[٤] $٢\frac{١}{٤} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{.....}$

[٥] $٠,٠٢٧ = \left(\frac{٣}{١٠}\right)^{.....}$

[٦] $٪٦٤ = \left(\frac{٤}{٥}\right)^{.....}$

[٧] إذا كان : $\frac{س}{ص} = -\frac{٢}{٥}$ فإن : $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٣} = ...$

[٨] إذا كان : $س = \frac{١}{٢}$ ، $ص = \frac{٢}{٣}$ فإن : $س^{٢} ص^{٢} = ...$

[٩] 📖 $\left(-\frac{١}{٢}\right)^{٣} - \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٢} = ...$

[١٠] $٢^{٢} + ٢^{٢} = ٢^{.....}$

[١١] $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٩}{١٦}$ ، $\frac{٢٧}{٦٤}$ ، .... ، .... (بنفس التسلسل).

[١٢] العدد الأكبر فى العددين $\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢}$ ، $\left(-\frac{٨}{٣}\right)^{٥}$ هو ....

---

٦ إذا كان : $س = -\frac{٢}{٣}$ ، $ص = -\frac{١}{٣}$

فأوجد قيمة : $س^{٢} + ص^{٣}$ «$\frac{١١}{٢٧}$»

---

٧ إذا كان : $أ = \frac{٢}{٣}$ ، $ب = -\frac{٤}{٣}$

فأوجد قيمة : $|أ^{٣} \div ب^{٣}|$ «$\frac{١}{٨}$»

---

٨ إذا كان : $س = ٠,٥$ ، $ص = -\frac{٢}{٣}$ ، $ع = -٣$

فأوجد قيمة : $٩ س ص^{٢} - ع^{٣}$ «٢٩»

---

٩ 📖 إذا كان : $أ = -\frac{١}{٢}$ ، $ب = ٢$ ، $ح = \frac{٣}{٤}$

فأوجد القيمة العددية للمقدار : $أ^{٣} ب^{٢} + ب^{٢} ح - ٨ أ ب ح$ «$٨\frac{١}{٢}$»

١٠ إذا كانت : $س = -\frac{٣}{٢}$ ، $ص = \frac{١}{٢}$ ، $ع = -\frac{٤}{٣}$

فأوجد فى أبسط صورة القيمة العددية لكل من :

[١] $س^٢ ص^٢ ع^٢$ « ١ »

[٢] $س^٢ \div ع^٢$ « $\frac{٨١}{٦٤}$ »

[٣] $س^٢ - ص ع^٢$ « $\frac{٤٩}{٣٦}$ »

[٤] $\frac{س^٢ ص^٢ ع^٢}{س + ص}$ « ١- »

تطبيق هندسى

١١ إذا كان : $ح = ل^٣$ حيث ح حجم المكعب ، ل طول حرف المكعب فاحسب حجم المكعب الذى طول حرفه $١\frac{١}{٢}$ سم « $\frac{٢٧}{٨}$ سم^٣ »

للمتفوقين

١٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كانت : $ص = \left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ حيث $س \in \{٠ ، ١ ، ٢ ، ٣\}$

فإن ص تأخذ أكبر قيمة عندما س = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

[٢] إذا كانت : $ص = \left(-\frac{٢}{٥}\right)^{س}$ حيث $س \in \{٠ ، ١ ، ٣ ، ٤\}$

فإن ص تأخذ أقل قيمة عندما س = ...

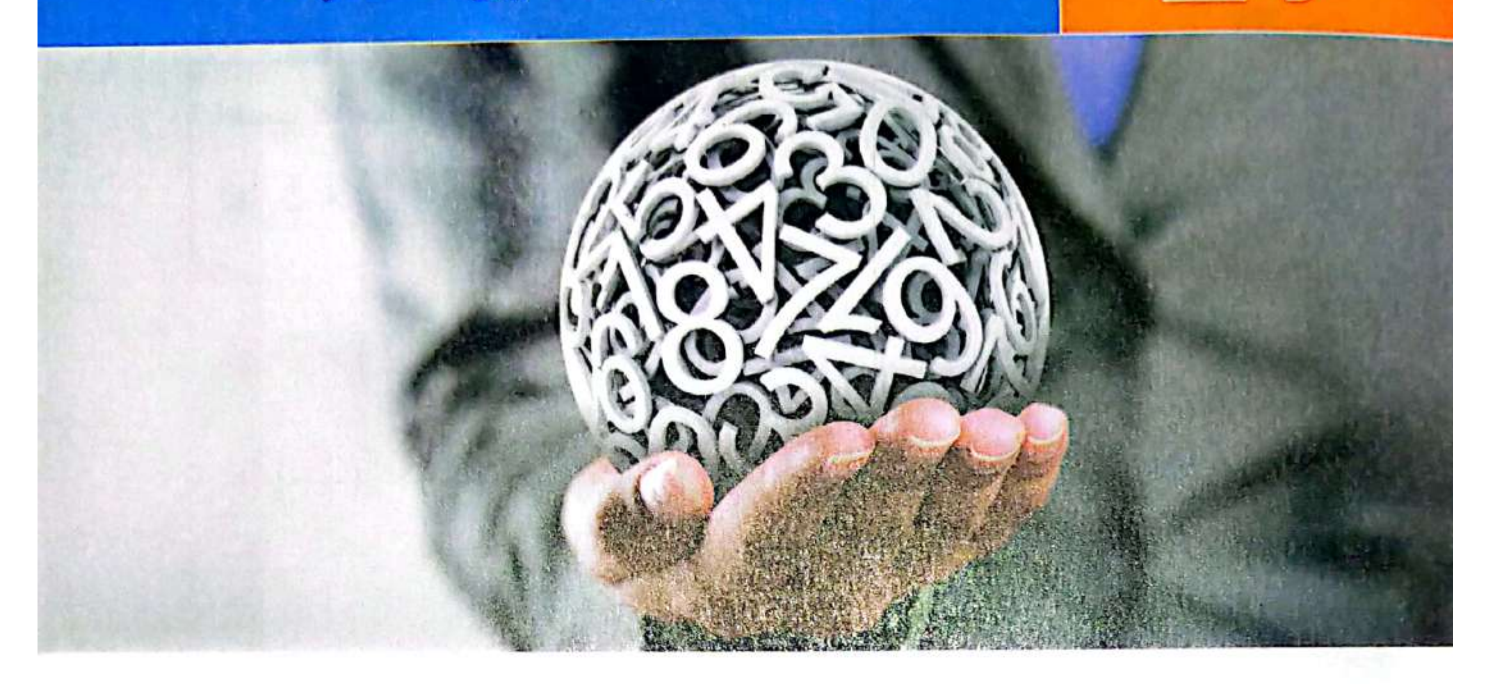
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

١٣ بدون فك رتب الأعداد الآتية ترتيبًا تصاعديًا :

$\left(\frac{٢}{٣}\right)^٢$ ، $\left(-\frac{٢}{٣}\right)^٣$ ، $\left(-\frac{١}{٣}\right)^٢$ ، $\left(-\frac{١}{٣}\right)^٣$

الدرس 2

القوى الصحيحة غير السالبة



* درست فى المرحلة الابتدائية قوانين الأسس الصحيحة غير السالبة فى ص
وفى هذا الدرس سوف يتضح لك أن هذه القوانين يمكن تطبيقها أيضًا على الأعداد النسبية.

القانون الأول

من تعريف الضرب المتكرر تعلم أن :

$$\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \quad ، \quad \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣}$$

أى أن : $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} = \boxed{\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣}} \times \boxed{\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣}} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٧}$

وبصفة عامة

إذا كان : $\frac{أ}{ب}$ عددًا نسبيًا ، ن ، م عددين صحيحين غير سالبين

فإن : $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} \times \left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن + م}$

أى أنه : عند ضرب الأساسات المتشابهة **نجمع الأسس.**

فمثلًا :
- $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{٣} \times \left(\frac{٢}{٥}\right)^{٢} = \left(\frac{٢}{٥}\right)^{٣ + ٢} = \left(\frac{٢}{٥}\right)^{٥}$
- $\left(-\frac{١}{٢}\right)^{٤} \times \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٣} = \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٤ + ٣} = \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٧}$

مثال ١

احسب كلاً مما يأتى مع وضع الناتج فى أبسط صورة :

١ $\frac{٢}{٣} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}$ ٢ $\left(-\frac{١}{٣}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$ ٣ $\frac{٣}{٤} \times \left(-\frac{٣}{٤}\right)^{٢}$

الحل

١ $\frac{٢}{٣} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{١+٢+٣} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦} = \frac{٢^{٦}}{٣^{٦}} = \frac{٦٤}{٧٢٩}$

٢ $\left(-\frac{١}{٣}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} = -\left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$

$= -\left(\frac{١}{٣}\right)^{٥} = -\frac{١^{٥}}{٣^{٥}} = -\frac{١}{٢٤٣}$

لاحظ أن :
$\left(-\frac{١}{٣}\right)^{٣} = -\left(\frac{١}{٣}\right)^{٣}$
لأن ٣ فى الأس عدد فردى

٣ $\frac{٣}{٤} \times \left(-\frac{٣}{٤}\right)^{٢} = \frac{٣}{٤} \times \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢} = \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٣}$

$= \frac{٣^{٣}}{٤^{٣}} = \frac{٢٧}{٦٤}$

لاحظ أن :
$\left(-\frac{٣}{٤}\right)^{٢} = \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢}$
لأن ٢ فى الأس عدد زوجى

القانون الثانى

من القانون الأول تعلم أن : $أ^{٦} = أ^{٢} \times أ^{٤}$

ومنها : $أ^{٦} \div أ^{٢} = أ^{٤}$ ، $أ^{٦} \div أ^{٤} = أ^{٢}$

وبصفة عامة

إذا كان : $\frac{أ}{ب}$ عددًا نسبيًا لا يساوى الصفر ، $ن$ ، م عددين صحيحين غير سالبين حيث $ن \geq م$

فإن : $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} \div \left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن-م}$

أى أنه : عند قسمة الأساسات المتشابهة نطرح الأسس.

فمثلاً : • $\left(\frac{٣}{٨}\right)^{٥} \div \left(\frac{٣}{٨}\right)^{٢} = \left(\frac{٣}{٨}\right)^{٥-٢} = \left(\frac{٣}{٨}\right)^{٣}$

• $\left(-\frac{٢}{٧}\right)^{٤} \div \left(-\frac{٢}{٧}\right)^{٢} = \left(-\frac{٢}{٧}\right)^{٤-٢} = \left(-\frac{٢}{٧}\right)^{٢}$

مثال ٢

احسب كلاً مما يأتى فى أبسط صورة :

١ $\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} \times \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٥} \div \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٧}$

٢ $\frac{٢^{٥} \times ٢^{٤}}{٢^{٦}}$

الحـــل

١ $\left[\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} \times \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٥}\right] \div \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٧} = \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢ + ٥} \div \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٧} = \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٧} \div \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٧}$

$= \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٧ - ٧} = \left(\frac{٤}{٥}\right)^{\text{صفر}} = ١$

٢ $\frac{٢^{٥} \times ٢^{٤}}{٢^{٦}} = \frac{٢^{٥ + ٤}}{٢^{٦}} = \frac{٢^{٩}}{٢^{٦}} = ٢^{٩ - ٦} = ٢^{٣} = ٨$

حاول بنفسك ١

أوجد كلاً مما يأتى فى أبسط صورة :

١ $\left(\frac{١}{٥}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٥}\right)^{٢}$

٢ $\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٨} \div \left(\frac{٣}{٧}\right)^{٦}$

٣ $\left(-\frac{٢}{٣}\right)^{٥} \times \left(-\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \div \left(-\frac{٢}{٣}\right)^{٦}$

٤ $\left(-\frac{١}{٤}\right)^{٧} \div \left(\frac{١}{٤}\right)^{٦} \times \frac{١}{٤}$

ملاحظة ١

من الضرب المتكرر لاحظ أن :

$\left(\frac{٣}{٤} \times \frac{٥}{٧}\right)^{٣} = \left(\frac{٣}{٤} \times \frac{٥}{٧}\right) \times \left(\frac{٣}{٤} \times \frac{٥}{٧}\right) \times \left(\frac{٣}{٤} \times \frac{٥}{٧}\right)$

$= \left(\frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤}\right) \times \left(\frac{٥}{٧} \times \frac{٥}{٧} \times \frac{٥}{٧}\right)$

$= \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٣} \times \left(\frac{٥}{٧}\right)^{٣}$

وبصفة عامة إذا كان : $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ء}$ عددين نسبيين ، $ن$ عددًا صحيحًا غير سالب

فإن : $\left(\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{ء}\right)^{ن} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} \times \left(\frac{جـ}{ء}\right)^{ن}$

ملاحظة ٢

من الضرب المتكرر لاحظ أن :

$$\left(\frac{٢}{٣} \div \frac{٥}{١١}\right)^{٤} = \left(\frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٥}{١١}}\right)^{٤} = \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٥}{١١}} \times \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٥}{١١}} \times \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٥}{١١}} \times \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٥}{١١}}$$

$$= \frac{\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣}}{\frac{٥}{١١} \times \frac{٥}{١١} \times \frac{٥}{١١} \times \frac{٥}{١١}} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} \div \left(\frac{٥}{١١}\right)^{٤}$$

وبصفة عامة إذا كان : $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ح}{ء}$ عددين نسبيين ، $\frac{ح}{ء} \neq$ صفر ، $ن$ عددًا صحيحًا غير سالب

فإن : $\left(\frac{أ}{ب} \div \frac{ح}{ء}\right)^{ن} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} \div \left(\frac{ح}{ء}\right)^{ن}$ (حيث $\frac{ح}{ء} \neq ٠$)

مثال ٣

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١ $\left(\frac{س ص}{ع}\right)^{٢}$

٢ $\left(\frac{٢ س}{٣ ص}\right)^{٤}$

الحل

١ $\left(\frac{س ص}{ع}\right)^{٢} = \frac{(س ص)^{٢}}{ع^{٢}} = \frac{س^{٢} ص^{٢}}{ع^{٢}}$

٢ $\left(\frac{٢ س}{٣ ص}\right)^{٤} = \frac{٢^{٤} \times س^{٤}}{٣^{٤} \times ص^{٤}} = \frac{١٦ س^{٤}}{٨١ ص^{٤}}$

القانون الثالث

تعلم أن : $(أ^{٢})^{٣} = أ^{٢} \times أ^{٢} \times أ^{٢}$

وطبقًا للقانون الأول فإن : $أ^{٢} \times أ^{٢} \times أ^{٢} = أ^{٦}$ أى أن : $(أ^{٢})^{٣} = أ^{٦}$

وبصفة عامة

إذا كان : $\frac{أ}{ب}$ عددًا نسبيًا ، $ن$ ، $م$ عددين صحيحين غير سالبين

فإن : $\left(\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن}\right)^{م} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن \times م}$

فمثلًا : • $\left(\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٣}\right)^{٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٣ \times ٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٦}$ • $\left(\left(-\frac{١}{٢}\right)^{٤}\right)^{٢} = \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٤ \times ٢} = \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٨}$

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتى فى أبسط صورة :

١ $\left(\left(-2\frac{1}{2}\right)^{2}\right)^{2}$

٢ $\left(\frac{\text{س}^{2}}{\text{ص}^{3}}\right)^{3}$

٣ $\frac{(-4\,\text{س}^{3}\,\text{ص}^{4})^{2}}{(-2\,\text{س}\,\text{ص}^{2})^{4}}$

الحل

١ $\left(\left(-2\frac{1}{2}\right)^{2}\right)^{2} = \left(-2\frac{1}{2}\right)^{2\times 2} = \left(-2\frac{1}{2}\right)^{4}$

$= \left(2\frac{1}{2}\right)^{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^{4} = \frac{5^{4}}{2^{4}} = \frac{625}{16}$

٢ $\left(\frac{\text{س}^{2}}{\text{ص}^{3}}\right)^{3} = \frac{(\text{س}^{2})^{3}}{(\text{ص}^{3})^{3}} = \frac{\text{س}^{2\times 3}}{\text{ص}^{3\times 3}} = \frac{\text{س}^{6}}{\text{ص}^{9}}$

٣ $\frac{(-4\,\text{س}^{3}\,\text{ص}^{4})^{2}}{(-2\,\text{س}\,\text{ص}^{2})^{4}} = \frac{(-4)^{2}\times \text{س}^{3\times 2}\times \text{ص}^{4\times 2}}{(-2)^{4}\times \text{س}^{4}\times \text{ص}^{2\times 4}}$

$= \frac{\cancel{16}\,\text{س}^{6}\,\cancel{\text{ص}^{8}}}{\cancel{16}\,\text{س}^{4}\,\cancel{\text{ص}^{8}}} = \text{س}^{6-4} = \text{س}^{2}$

مثال ٥

إذا كان : $\text{س} = \frac{1}{2}$ ، $\text{ص} = -\frac{3}{4}$ ، $\text{ع} = \frac{3}{2}$

فأوجد فى أبسط صورة القيمة العددية لكل من :

١ $\left(\frac{\text{س}^{2}}{\text{ع}}\right)^{3}$

٢ $\left(\frac{\text{س}^{2}\,\text{ع}}{\text{ص}}\right)^{2}$

الحل

١ $\left(\frac{\text{س}^{2}}{\text{ع}}\right)^{3} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \div \frac{3}{2}\right)^{3} = \left(\frac{1}{2^{2}} \times \frac{2}{3}\right)^{3}$

$= \left(\frac{1}{\cancel{4}_{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3}\right)^{3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{3} = \frac{1^{3}}{6^{3}} = \frac{1}{216}$

لاحظ أن :

$\frac{\text{س}^{2}}{\text{ع}} = \text{س}^{2} \div \text{ع}$

٢ $\left(\frac{س^{٢}\,ع}{ص}\right)^{٢} = \frac{س^{٢\times٢}\,ع^{٢}}{ص^{٢}} = \frac{س^{٤}\,ع^{٢}}{ص^{٢}}$

$$= \frac{\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} \times \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}}{\left(-\frac{٣}{٤}\right)^{٢}} = \frac{١^{٤}}{٢^{٤}} \times \frac{٣^{٢}}{٢^{٢}} \times \frac{٤^{٢}}{٣^{٢}} = \frac{١}{١٦} \times \frac{١}{٤} \times ١٦ = \frac{١}{٤}$$

حاول بنفسك ٢

أوجد كلاً مما يأتى فى أبسط صورة :

① $\left(\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\right)^{٣}$ ② $\left(\frac{أ^{٢}\,ب^{٢}}{جـ^{٣}\,ء^{٤}}\right)^{٢}$ ③ $\left(\frac{٥^{٢} \times ٥^{٤}}{٥^{٥}}\right)^{٢}$

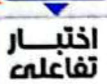


تمارين 2

على القوى الصحيحة غير السالبة







● تذكر ● فهم ○ تطبيق ⁂ حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ احسب كلاً مما يأتى مع وضع الناتج فى أبسط صورة :

١ $\left(\frac{2}{3}\right)^{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$ | ٢ $\left(-\frac{2}{3}\right)^{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$ | ٣ $\frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{4}$

٤ $\left(\frac{1}{6}\right)^{9} \div \left(\frac{1}{6}\right)^{8}$ | ٥ $\left(\frac{2}{7}\right)^{5} \div \left(\frac{2}{7}\right)^{3}$ | ٦ $\left(-\frac{3}{5}\right)^{7} \div \left(\frac{3}{5}\right)^{5}$

٧ $\left(-\frac{5}{2}\right)^{2} \div 2\frac{1}{2}$ | ٨ $\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$ | ٩ $\left(\frac{4}{5}\right)^{8} \div \left(\frac{4}{5}\right)^{6} \times \frac{4}{5}$

---

٢ أوجد كلاً مما يأتى فى أبسط صورة :

١ $\frac{3^{7} \times 3^{3}}{3^{6}}$ | ٢ $\frac{2^{6} \times 2}{2^{3} \times 2^{4}}$ | ٣ $\frac{(-5)^{4} \times 5^{2}}{5^{3}}$

٤ $\frac{(-2)^{5} \times 2^{4}}{(-2)^{3} \times 2^{2}}$ | ٥ $\frac{(-3)^{5} \times (-2)^{7}}{(-3)^{3} \times (-2)^{5}}$ | ٦ $\frac{\text{س}^{4} \times \text{ص}^{3} \times \text{س}^{5}}{\text{س}^{6} \times \text{ص}^{2}}$

---

٣ أوجد كلاً مما يأتى فى أبسط صورة :

١ $\left(\frac{\text{أ}\,\text{ب}}{\text{حـ}}\right)^{5}$ | ٢ $\left(\frac{5\,\text{س}}{3\,\text{ص}}\right)^{2}$ | ٣ $\left(-\frac{2\,\text{أ}\,\text{ب}}{3\,\text{حـ}}\right)^{4}$

٤ $\left(\frac{\text{س}^{2}}{\text{ص}^{2}}\right)^{2}$ | ٥ $\left(\frac{\text{أ}^{3}\,\text{ب}^{2}}{\text{حـ}^{5}}\right)^{3}$ | ٦ $\left(-\frac{\text{حـ}^{2}}{\text{ء}}\right)^{3}$

٧ $\left(-\frac{\text{س}^{3}}{\text{ص}^{2}}\right)^{2}$ | ٨ $\frac{(4\,\text{س}^{3}\,\text{ص}^{2})^{7}}{(2\,\text{س}^{2}\,\text{ص})^{7}}$ | ٩ $\frac{(2\,\text{أ})^{3} \times (2\,\text{أ})^{4}}{(-2\,\text{أ})^{6} \times \text{أ}}$

٤ احسب كلاً مما يأتى مع وضع الناتج فى أبسط صورة :

١ $\left(\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\right)^{٢}$ ٢ $\left(\left(-\frac{٣}{٢}\right)^{٢}\right)^{٥}$ ٣ $\left(\left(٢\frac{١}{٢}\right)^{٣}\right)^{٢}$

٤ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{١٠} \times \left(\frac{٥}{٣}\right)^{١٠}$ ٥ $\left(\left(\frac{٢}{٧}\right)^{٢}\right)^{٣} \times \left(\frac{٧}{٢}\right)^{٦}$ ٦ $\left(٢\frac{١}{٢}\right)^{٢} \times \left(-\frac{٢}{٥}\right)^{٢}$

٥ اختر للعمود (أ) ما يناسبه من العمود (ب) :

العمود (أ)	العمود (ب)
١ $(س^{٢})^{ن}$	(أ) $س^{ن٢}$
٢ $(س^{ن})^{ن}$	(ب) $\frac{٣ م^{ح}}{٢ ن^{ح}}$
٣ $(س ص^{أ})^{ب}$	(جـ) $٢٧ س^{٣} ص^{٣أ}$
٤ $\left(\frac{س}{ص^{أ}}\right)^{ب}$	(د) $\frac{٣^{ح} م^{ح}}{٢^{ح} ن^{ح}}$
٥ $(-٣ س ص^{أ})^{٣}$	(هـ) $س^{٢ن}$
٦ $(٣ س ص^{أ})^{٣}$	(و) $-٢٧ س^{٣} ص^{٣أ}$
٧ $\frac{٣}{٢}\left(\frac{م}{ن}\right)^{ح}$	(ز) $\frac{ن^{ب}}{ص^{أب}}$
٨ $\left(\frac{٣ م}{٢ ن}\right)^{ح}$	(ح) $س^{ب} ص^{أب}$
	(ط) $\frac{س^{ب}}{ص^{أب}}$
	(ى) $س ص^{أب}$

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ $٣^{٢} \times ٣^{٥} = $ ....

(أ) $٣^{٧}$ (ب) $٣^{٣}$ (جـ) $٣^{١٠}$ (د) $٣^{٢٥}$

٢ $٥^{٢} + ٥^{٢} = $ ....

(أ) $١٠^{٢}$ (ب) $١٠^{٤}$ (جـ) $٥^{٤}$ (د) ٥٠

٣ $٣^{٥} \times ٢^{٥} =$ ....

(أ) $٥^{١٠}$ (ب) $٦^{١٠}$ (جـ) $٦^{٥}$ (د) $٦^{٢٥}$

٤ $(٥ أ)^{صفر} =$ .... ، أ $\neq ٠$

(أ) ٥ (ب) أ (جـ) ٥ أ (د) ١

٥ $٣^{(٢^{٣})} =$ ....

(أ) $٣^{٦}$ (ب) $٣^{٥}$ (جـ) $٣^{٨}$ (د) $٣^{٣٢}$

٦ $(٥^{٢})^{٣} =$ ....

(أ) $٥^{٦}$ (ب) $٥^{٥}$ (جـ) $٥^{٣٢}$ (د) ٥

٧ $٣^{١٠} + ٣^{١٠} + ٣^{١٠} =$ ....

(أ) $٣^{١٠}$ (ب) $٣^{٣٠}$ (جـ) $٩^{١٠}$ (د) $٣^{١١}$

٨ $٤^{س} + ٤^{س} + ٤^{س} + ٤^{س} =$ ....

(أ) $٤^{س}$ (ب) $٤^{٤ س}$ (جـ) $٤^{س+١}$ (د) $٤ س^{٤}$

٩ $\frac{(٣^{٢})^{٥}}{(٣^{٥})^{٢}} =$ ....

(أ) $٣^{١٠}$ (ب) $٣^{٥٢}$ (جـ) $٣^{٢٥}$ (د) ١

١٠ $\frac{(س^{٢})^{٣}}{س^{٣}} =$ .... ، س $\neq ٠$

(أ) $س^{٦}$ (ب) $س^{٢}$ (جـ) $س^{٣}$ (د) س

١١ $(٢ ص)^{٣} =$ ....

(أ) $٢ ص^{٣}$ (ب) ٨ ص (جـ) $٨ ص^{٣}$ (د) ٣٢ ص

١٢ $(ب^{٣})^{٤} =$ ....

(أ) $ب^{٤٣}$ (ب) $ب^{٧}$

(جـ) $ب^{٣} \times ب^{٣} \times ب^{٣}$ (د) $ب^{٤} \times ب^{٤} \times ب^{٤} \times ب^{٤}$

[13] ربع العدد $٤^{٢٠}$ = ...

(أ) $٤^{٥}$ (ب) $٤^{١٠}$ (جـ) $٤^{١٩}$ (د) $٢^{١٠}$

[7] اختصر لأبسط صورة : $\frac{(٢\text{ ص})^{٤} \times (٣\text{ ص})^{٢}}{١٢\text{ ص}^{٥}}$

ثم أوجد قيمة الناتج : عندما ص = $-\frac{١}{٦}$ «−٢»

[8] إذا كانت : $أ = \frac{٥}{٣}$ ، $ب = -\frac{٣}{٢}$ ، $جـ = \frac{٢}{٥}$ فأوجد القيمة العددية لكل من :

[1] $\frac{(أ^{٢}\text{ جـ}^{٢})^{٢}}{ب}$ [2] $\left(\frac{٢\text{ أ ب}}{٥\text{ جـ}}\right)^{٣}$ «$-\frac{٣٢}{٢٤٣}$ ، $-\frac{١٢٥}{٨}$»

[9] إذا كانت : $س = -\frac{١}{٢}$ ، $ص = \frac{٣}{٤}$ ، $ع = -\frac{٣}{٢}$

أوجد فى أبسط صورة القيمة العددية لكل من :

[1] $س^{٣}\text{ ص}^{٢}$ [2] $ص^{٣}\text{ س}^{٢}$ [3] $\frac{س^{٣}}{ص^{٢}\text{ ع}^{٢}}$ «$-\frac{٩}{١٢٨}$ ، $\frac{٢٧}{٢٥٦}$ ، $-\frac{٨}{٨١}$»

[10] أكمل ما يأتى :

[1] $\left(\left(\frac{٧}{٩}\right)^{٣}\right)^{٤} = \frac{٧^{١٢}}{٣^{.....}}$

[2] إذا كان : $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٥} \times س = \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٧}$ فإن : س = ...

[3] الأكبر فى العددين : $\left((-٣)^{٥}\right)^{٣}$ ، $\left((-٣)^{٢}\right)^{٤}$ هو العدد ....

[4] $\left((-١)^{٥}\right)^{٢} - \left((-١)^{٣}\right)^{٢} = $ ....

[5] $\frac{٤^{٤}}{٤^{٣}} + \frac{٤^{٣}}{٤^{٢}} + \frac{٤^{٢}}{٤} + ٤ = ٢^{.....}$

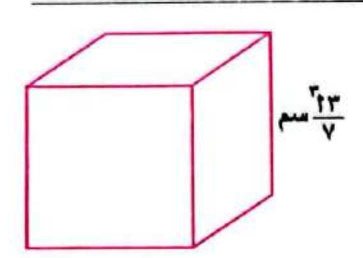
[6] $٢^{٢س} \times ٤^{س} = ٤^{.....}$



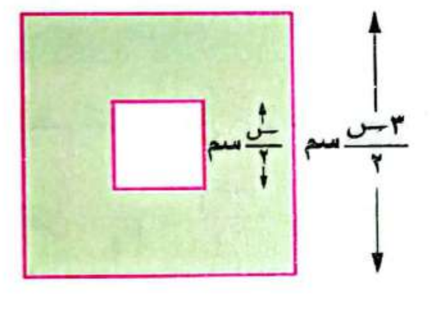
تطبيقات هندسية



١١ أوجد مساحة المربع الذى طول ضلعه $\frac{٢\text{س}}{٥}$ سم



١٢ أوجد حجم المكعب الذى طول حرفه $\frac{٣\text{م}^{٣}}{٧}$ سم



١٣ فى الشكل المقابل :

مربع مرسوم داخل مربع

أوجد مساحة الجزء المظلل.

للمتفوقين

١٤ إذا كان أربعة أمثال عدد هو $٤^{٣}$ فأوجد $\frac{٣}{٤}$ هذا العدد. «١٢»

---

١٥ إذا كان : $\text{س} = \frac{١}{٥}$ ، $\text{ص} = ٥$

فأوجد قيمة : $\text{س}^{١٥}\ \text{ص}^{١٤}$ «$\frac{١}{٥}$»

---

١٦ أثبت أن :

[١] $٥^{\text{س}+٢} - ٥^{\text{س}+١} = ٢٠ \times ٥^{\text{س}}$

[٢] $٣^{١٥} + ٣^{١٤}$ تقبل القسمة على ٤

القوى الصحيحة السالبة



تعلم أنه إذا كان : أ عددًا نسبيًا لا يساوى الصفر فإن : $\text{أ}^{\text{صفر}} = ١$

إذن : $\frac{١}{\text{أ}^{\text{ن}}} = \frac{\text{أ}^{\text{صفر}}}{\text{أ}^{\text{ن}}} = \text{أ}^{\text{صفر} - \text{ن}} = \text{أ}^{-\text{ن}}$

أى أن : $\text{أ}^{-\text{ن}} = \frac{١}{\text{أ}^{\text{ن}}}$

تعريف

إذا كان : أ عددًا نسبيًا لا يساوى الصفر ، ن عددًا صحيحًا موجبًا

فإن : $\text{أ}^{-\text{ن}} = \frac{١}{\text{أ}^{\text{ن}}}$ ، $\text{أ}^{\text{ن}} = \frac{١}{\text{أ}^{-\text{ن}}}$

فمثلًا :

- $٣^{-٣} = \frac{١}{٣^{٣}} = \frac{١}{٢٧}$
- $٣ \times ٥^{-١} = ٣ \times \frac{١}{٥} = \frac{٣}{٥}$
- $\frac{٢}{٥^{-٢}} = ٢ \times ٥^{٢} = ٢ \times ٢٥ = ٥٠$
- $٠,١ = \frac{١}{١٠} = ١٠^{-١}$ ، $٠,٠١ = \frac{١}{١٠٠} = \frac{١}{(١٠)^{٢}} = ١٠^{-٢}$ ، ... وهكذا

! ملاحظتان

١ إذا كان : $أ$ عددًا نسبيًا لا يساوى الصفر ، $ن$ عددًا صحيحًا موجبًا

فإن : $أ^{ن} \times أ^{-ن} = أ^{ن} \times \frac{١}{أ^{ن}} = ١$ (المحايد الضربى)

أى أن : **كل من $أ^{ن}$ ، $أ^{-ن}$ هو المعكوس الضربى للآخر.**

٢ إذا كان : $\frac{أ}{ب}$ عددًا نسبيًا لا يساوى الصفر ، $ن$ عددًا صحيحًا موجبًا

فإن : $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{ن}$ فمثلًا : $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٢} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٩}{٤}$

مثال ١

أوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١ $٢^{٤} \times ٢^{-٢}$ ٢ $\frac{٥^{-٢}}{٥^{-٣}}$ ٣ $(٣^{٢})^{-٢}$

٤ $\frac{٦^{-٣} \times ٦^{٥}}{٦^{٢}}$ ٥ $\left(\frac{٥^{٣} \times ٥^{-٢}}{٥^{-١} \times ٥^{٤}}\right)^{-٢}$ ٦ $(٧^{٣})^{٢} \times (٧^{-٢})^{٢}$

٧ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{-٣} \div \left(\frac{٤}{٥}\right)^{-٣}$

الحـــل

١ $٢^{٤} \times ٢^{-٢} = ٢^{٤} \times \frac{١}{٢^{٢}} = \frac{٢^{٤}}{٢^{٢}} = ٢^{٤-٢} = ٢^{٢} = ٤$

٢ $\frac{٥^{-٢}}{٥^{-٣}} = \frac{٥^{٣}}{٥^{٢}} = ٥^{٣-٢} = ٥$

٣ $(٣^{٢})^{-٢} = \frac{١}{(٣^{٢})^{٢}} = \frac{١}{٣^{٤}} = \frac{١}{٨١}$

٤ $\frac{٦^{-٣} \times ٦^{٥}}{٦^{٢}} = \frac{٦^{٥}}{٦^{٣} \times ٦^{٢}} = \frac{٦^{٥}}{٦^{٥}} = ١$

٥ $\left(\frac{٥^{٣} \times ٥^{-٢}}{٥^{-١} \times ٥^{٤}}\right)^{-٢} = \left(\frac{٥^{٣} \times ٥}{٥^{٢} \times ٥^{٤}}\right)^{-٢} = \left(\frac{٥^{٤}}{٥^{٦}}\right)^{-٢} = \left(\frac{٥^{٦}}{٥^{٤}}\right)^{٢}$

$= (٥^{٦-٤})^{٢} = (٥^{٢})^{٢} = ٥^{٤} = ٦٢٥$

٦ $(٧^{٣})^{٢} \times (٧^{-٢})^{٢} = (٧^{٣})^{٢} \times \left(\frac{١}{٧^{٢}}\right)^{٢}$

$= ٧^{٦} \times \frac{١}{٧^{٤}} = ٧^{٦-٤} = ٧^{٢} = ٤٩$

٧ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{-٣} \div \left(\frac{٤}{٥}\right)^{-٣} = \left(\frac{٥}{٣}\right)^{٣} \div \left(\frac{٥}{٤}\right)^{٣}$

$= \left(\frac{٥}{٣} \div \frac{٥}{٤}\right)^{٣} = \left(\frac{٥}{٣} \times \frac{٤}{٥}\right)^{٣}$

$= \left(\frac{٤}{٣}\right)^{٣} = \frac{٤^{٣}}{٣^{٣}} = \frac{٦٤}{٢٧}$

! ملاحظة

جميع قوانين الأسس التى درستها فى الدرس السابق صحيحة فى حالة الأسس السالبة وعلى هذا فإنه يمكن حل المثال السابق باستخدام قوانين الأسس كما يلى :

١ $٢^{٤} \times ٢^{-٢} = ٢^{٤+(-٢)} = ٢^{٢} = ٤$

٢ $\frac{٥^{-٢}}{٥^{-٣}} = ٥^{-٢-(-٣)} = ٥^{-٢+٣} = ٥$

٣ $(٣^{٢})^{-٢} = ٣^{٢ \times (-٢)} = ٣^{-٤} = \frac{١}{٣^{٤}} = \frac{١}{٨١}$

٤ $\frac{٦^{-٣} \times ٦^{٥}}{٦^{٢}} = ٦^{-٣+٥-٢} = ٦^{\text{صفر}} = ١$

٥ $\left(\frac{٥^{٣} \times ٥^{-٢}}{٥^{-١} \times ٥^{٤}}\right)^{-٢} = (٥^{٣+(-٢)-(-١)-٤})^{-٢} = (٥^{٣-٢+١-٤})^{-٢}$

$= (٥^{-٢})^{-٢} = ٥^{-٢ \times (-٢)} = ٥^{٤} = ٦٢٥$

٦ $(٧^{٣})^{٢} \times (٧^{-٢})^{٢} = (٧^{٣} \times ٧^{-٢})^{٢} = (٧^{٣+(-٢)})^{٢} = ٧^{٢} = ٤٩$

٧ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{-٣} \div \left(\frac{٤}{٥}\right)^{-٣} = \left(\frac{٣}{٥} \div \frac{٤}{٥}\right)^{-٣} = \left(\frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{٤}\right)^{-٣}$

$= \left(\frac{٣}{٤}\right)^{-٣} = \left(\frac{٤}{٣}\right)^{٣} = \frac{٤^{٣}}{٣^{٣}} = \frac{٦٤}{٢٧}$

حاول بنفسك ١

أوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١ $٥^{-٣}$ ٢ $\left(\frac{٣}{٧}\right)^{-٢}$ ٣ $(٢^{-٣})^{٢}$ ٤ $\left(\frac{٢^{-٢} \times ٢^{٦}}{٢^{٣}}\right)^{-٣}$

مثال ٢

اختصر كلاً مما يأتى لأبسط صورة حيث س ≠ ٠ :

١ $\text{س}^{٥} \times \text{س}^{-٢} \times \text{س}^{-٣}$ ٢ $(\text{س}^{٢})^{-٣} \div (\text{س}^{-١})^{٢}$ ٣ $\left(\dfrac{\text{س}^{٤} \times \text{س}^{-٣}}{\text{س}^{-٤} \times \text{س}}\right)^{-٢}$

الحــل

١ $\text{س}^{٥} \times \text{س}^{-٢} \times \text{س}^{-٣} = \text{س}^{٥ + (-٢) + (-٣)}$

$= \text{س}^{٥ - ٢ - ٣} = \text{س}^{٠} = ١$

٢ $(\text{س}^{٢})^{-٣} \div (\text{س}^{-١})^{٢} = \text{س}^{-٦} \div \text{س}^{-٢} = \text{س}^{-٦ - (-٢)}$

$= \text{س}^{-٦ + ٢} = \text{س}^{-٤} = \dfrac{١}{\text{س}^{٤}}$

٣ $\left(\dfrac{\text{س}^{٤} \times \text{س}^{-٣}}{\text{س}^{-٤} \times \text{س}}\right)^{-٢} = (\text{س}^{٤ + (-٣) - (-٤) - ١})^{-٢}$

$= (\text{س}^{٤ - ٣ + ٤ - ١})^{-٢}$

$= (\text{س}^{٤})^{-٢} = \text{س}^{-٨} = \dfrac{١}{\text{س}^{٨}}$

حاول بنفسك ٢

اختصر كلاً مما يأتى مع جعل الناتج بأس صحيح موجب حيث المقام لا يساوى الصفر :

١ $(\text{س}^{-٢})^{-٥}$ ٢ $\left(\dfrac{\text{م}^{٤}}{\text{م}^{-٣}}\right)^{-٢}$ ٣ $(\text{ص}^{٥} \times \text{ص}^{-٢})^{٣}$





اختبار تفاعلي

تمارين 3

على القوى الصحيحة السالبة

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات • أسئلة كتاب الوزارة

١ احسب قيمة كل مما يأتى :

١) $٤^{-١}$ ٢) $٥^{-٢}$ ٣) $(\frac{١}{٢})^{-١}$

٤) $(-\frac{٢}{٣})^{-٢}$ ٥) $(٠,٢)^{-٢}$ ٦) $(١,٢)^{-١}$

٢ احسب قيمة كل مما يأتى :

١) $٣^{٧} \times ٣^{-٣}$ ٢) $٢^{-٢} \times ٢^{-٣}$ ٣) $\frac{٣}{٣^{-٢}}$ ٤) $\frac{٦^{-٢}}{٦^{-٣}}$

٣ احسب قيمة كل مما يأتى :

١) $(٥^{-١})^{-٣}$ ٢) $(٣^{-٢})^{٢}$ ٣) $(٠,٢٥)^{-٢}$

٤) $(٢^{-١} \times ٢^{-٢})^{٣}$ ٥) $(\frac{٣^{-١}}{٣})^{٢}$ ٦) $(\frac{٨^{٤}}{٨^{-٤}})^{صفر}$

٤ احسب قيمة كل مما يأتى :

١) $\frac{٨ \times ٨^{-٢}}{٨^{-٣}}$ ٢) $\frac{٧^{-٢} \times ٧^{٥}}{٧^{٣}}$ ٣) $\frac{٢^{٥} \times ٢^{-٣}}{٢^{-٤} \times ٢^{٣}}$

٤) $\frac{٢^{٣} \times ٢^{-٣}}{(٢^{٢})^{٣}}$ ٥) $\frac{(٣^{-٢})^{٣}}{٣^{-٢} \times ٣^{-٦}}$ ٦) $(\frac{٩^{٣} \times ٩}{٩^{٥}})^{-٣}$

٧) $(\frac{٢^{٥} \times ٣^{٣}}{٣^{٤} \times ٢^{٣}})^{-١}$ ٨) $(٣^{صفر} \times ٢^{-٢})^{-٣}$ ٩) $\frac{(١٠)^{٢} \times (٠,٠١)^{٢}}{(١٠)^{-٣}}$

٥ اختصر كلاً مما يلى مع جعل الناتج بأس صحيح موجب حيث المقام لا يساوى الصفر :

١) $٧ س^{-١}$ ٢) $س^{-١} ص^{٢}$ ٣) $أ^{-٢} ب^{-٣}$

٤) $س^{٣} \times س^{-٥}$ ٥) $س^{٣} \times س^{-٢} \times س^{-١}$ ٦) $\frac{ح^{-٥}}{ح^{٢}}$

٧) $(أ^{-٢})^{٣}$ ٨) $(ب^{-١})^{-٣}$ ٩) $((أ)^{٢} \times أ^{-٥})^{٢}$

[١٠] $(\text{س}^{٢})^{-٣} \times (\text{س}^{-٣})^{-٢}$

[١١] 📖 $\left(\frac{\text{ص}^{٥}}{\text{ص}^{-٢}}\right)^{-٣}$

[١٢] $\frac{\text{س}^{٢} \times \text{س}^{-٣}}{\text{س}^{-٤} \times \text{س}}$

[١٣] $\frac{(\text{س}^{٢})^{-٣} \times (\text{س}^{-١})^{٢}}{\text{س}^{-٣} \times \text{س}^{-٤}}$

[١٤] 📖 $\frac{\text{أ}^{-١}}{\text{ب}^{٢}} \times \left(\frac{\text{أ}^{-١}}{٢\,\text{ب}^{٢}}\right)^{-٢}$

[١٥] $(\text{س} + \text{س}^{-١})^{٢}$

٦ أكمل ما يأتى :

[١] $٢^{-٣}\ \text{ح}^{\text{صفر}} =$ ....

[٢] 📖 $(\text{ب}^{-١})^{-٣} = \text{ب}^{.....}$

[٣] 📖 $٢\ \text{س}^{-٣} = \frac{٢}{.........}$

[٤] 📖 $(٣\ \text{س}^{-١})^{٢} = ٩\ \text{س}^{.....} = \frac{٩}{.........}$

[٥] $(٣\ \text{ص}^{-٢})^{-٢} =$ ....

[٦] 📖 $(٣\ \text{أ}^{٢})^{-١} = \frac{١}{.........}$

[٧] 📖 $٢\ \text{س}^{-٢}\ \text{ص}^{-٣} = \frac{٢}{.........}$

[٨] $\frac{\text{س}^{-٥}}{\text{ص}^{-٥}} = (.........)^{٥}$

[٩] $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + ٢^{\text{صفر}} - (٢)^{-٢} =$ ....

[١٠] $(\text{س}^{٢})^{.....} = \frac{١}{\text{س}^{٤}}$

[١١] $٢^{١٠} \times ٢^{-١٠} = ٣^{.....}$

[١٢] $\text{أ}^{-٥} + ١ = \text{أ}^{-٥}\ (..... + ...)$ حيث $\text{أ} \neq ٠$

[١٣] إذا كان : $\text{س} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{ص} = \frac{١}{٤}$ فإن : $(\text{س} - \text{ص})^{-١} =$ ....

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : $\text{أ}^{-١} = \frac{٢}{٣}$ فإن : أ = ...

(أ) $-\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $-\frac{٣}{٢}$ (د) ١

[٢] إذا كان : $\text{أ} = ٧^{\text{س}}$ ، $\text{ب} = ٧^{-\text{س}}$ فإن : أ × ب = ...

(أ) $٧^{٢\text{س}}$ (ب) $٤٩^{٢\text{س}}$ (جـ) ١ (د) صفر

[٣] $\frac{٥^{\text{س}}}{٥^{\text{ص}}} =$ ....

(أ) $٥^{\text{س} \div \text{ص}}$ (ب) $٥^{\text{س} - \text{ص}}$ (جـ) $٥^{\text{س} + \text{ص}}$ (د) $-\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

٤ $\frac{6 ا^2 س^4}{2 ا^3 س^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) ٣ ا س (ب) $3 ا^5 س^7$ (جـ) $\frac{3 س}{ا}$ (د) $\frac{3}{ا س}$

٥ $\frac{(-2 س^2 ص)^3}{(-4 س ص^2)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) $\frac{س^3}{2 ص}$ (ب) $-\frac{س^4}{2 ص}$ (جـ) $\frac{س^5}{2 ص^2}$ (د) $\frac{س^4}{ص}$

٦ $\left(\frac{م^2}{ن^{-2}}\right)^{-1} \left(\frac{3 م^{-2}}{ن^{-2}}\right)^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) $\frac{9 م^2}{ن^7}$ (ب) $\frac{م^2}{9 ن^7}$ (جـ) $\frac{م^2}{9 ن}$ (د) $\frac{9 م^6}{ن}$

٧ $\frac{(2 ا ب^{-2})^{صفر}}{3^{صفر} م^{-2} ب} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) $\frac{ا^2}{3 ب^2}$ (ب) $ا^2$ (جـ) ١ (د) $\frac{ا^2}{ب}$

٨ إذا كان : $ا^{س} = 2$ ، $ا^{ص} = 3$ فإن : $ا^{س - ص} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) ٦

٩ إذا كان : $س ص^{-1} = \frac{1}{2}$ فإن : $\frac{ص}{س} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $-\frac{1}{2}$ (جـ) ١ (د) ٢

١٠ $3^{-1} + 3^{-1} + 3^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) 3^{-2} (ب) 3^2 (جـ) 9^{-2} (د) ١

١١ المعكوس الضربى للعدد 5^{-1} هو $\ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) ٥ (جـ) −٥ (د) $-\frac{1}{5}$

١٢ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} \times \left(\frac{٥}{٣}\right)^{-٢} =$ ....

(أ) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٤}$ (ب) ١ (جـ) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{-٤}$ (د) صفر

---

٨ أكمل بوضع إحدى العلامات > أ، < أ، = :

١ $٢^{١٠}$ .... $٢^{-١٠}$	٢ $٣^{-٢٠}$ .... $٣^{٢}$
٣ $٥^{-١٥}$ .... $٢^{-١٥}$	٤ $(-٧)^{-٢}$ .... $(-٧)^{١٩}$
٥ $(-١)^{-٦}$ .... $(-١)^{-٩}$	٦ $(-١)^{-٢٠}$ .... $(١)^{-١٠}$

---

٩ لماذا تكون $س^{-٣}$ غير معرفة عند س = صفرًا ؟

---

١٠ احسب قيمة : $\left(-\frac{٣}{٥}\right)^{س} \times \left(\frac{٣}{٥}\right)^{ص}$ **في كل من الحالتين الآتيتين :**

١ س = −٢ ، ص = ٢ «١»

٢ س = −١ ، ص = ٢ «$-\frac{٣}{٥}$»

---

١١ إذا كان : س = $-\frac{١}{٢}$ ، ص = $\frac{٢}{٣}$

فأوجد في أبسط صورة القيمة العددية للمقدار : $\left(\frac{ص}{س^{٢}}\right)^{-٢}$ «$\frac{١}{٣٦}$»

---

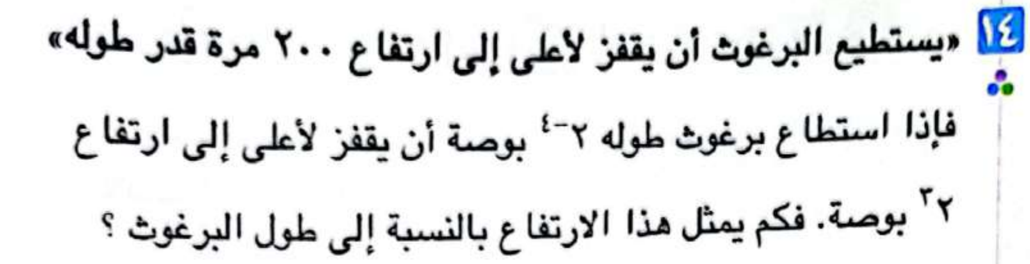
١٢ اختصر لأبسط صورة : $\frac{٢^{١٠} \times ٣^{٤}}{(١٢)^{٥}}$ «$\frac{١}{٣}$»

---

١٣ اختصر لأبسط صورة : $\frac{٦^{٢ن+١} \times ٤^{-ن}}{٢^{ن} \times ٣^{٢ن+١}}$ **ثم أوجد قيمة الناتج عندما : ن = ٣** «$\frac{١}{٤}$»



تطبيقات حياتية



١٤ «يستطيع البرغوث أن يقفز لأعلى إلى ارتفاع ٢٠٠ مرة قدر طوله»



فإذا استطاع برغوث طوله $٢^{-٤}$ بوصة أن يقفز لأعلى إلى ارتفاع $٢^{٣}$ بوصة. فكم يمثل هذا الارتفاع بالنسبة إلى طول البرغوث ؟

---

١٥ ينمو عدد سكان مدينة طبقًا للقاعدة : $س = ٢ (١,٠٣)^{ن}$ مليون نسمة حيث س عدد السكان بالمليون ، ن عدد السنين :

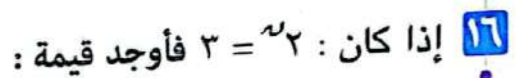
١ ما عدد السكان بعد سنتين ؟

٢ ما عدد السكان الآن ؟

٣ ما عدد السكان منذ سنة ؟



للمتفوقين



١٦ إذا كان : $٢^{ن} = ٣$ فأوجد قيمة :

١ $٢^{ن+١}$

٢ $٤^{ن}$

٣ $٤^{-ن}$

٤ $٢^{ن-١}$

«٦ ، ٩ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{٣}{٢}$»

---

١٧ إذا كان : أ = ٥ ، $ب = ٥^{-١}$ فأوجد قيمة : $أ^{٥١} ب^{٥٠}$

«٥»

---

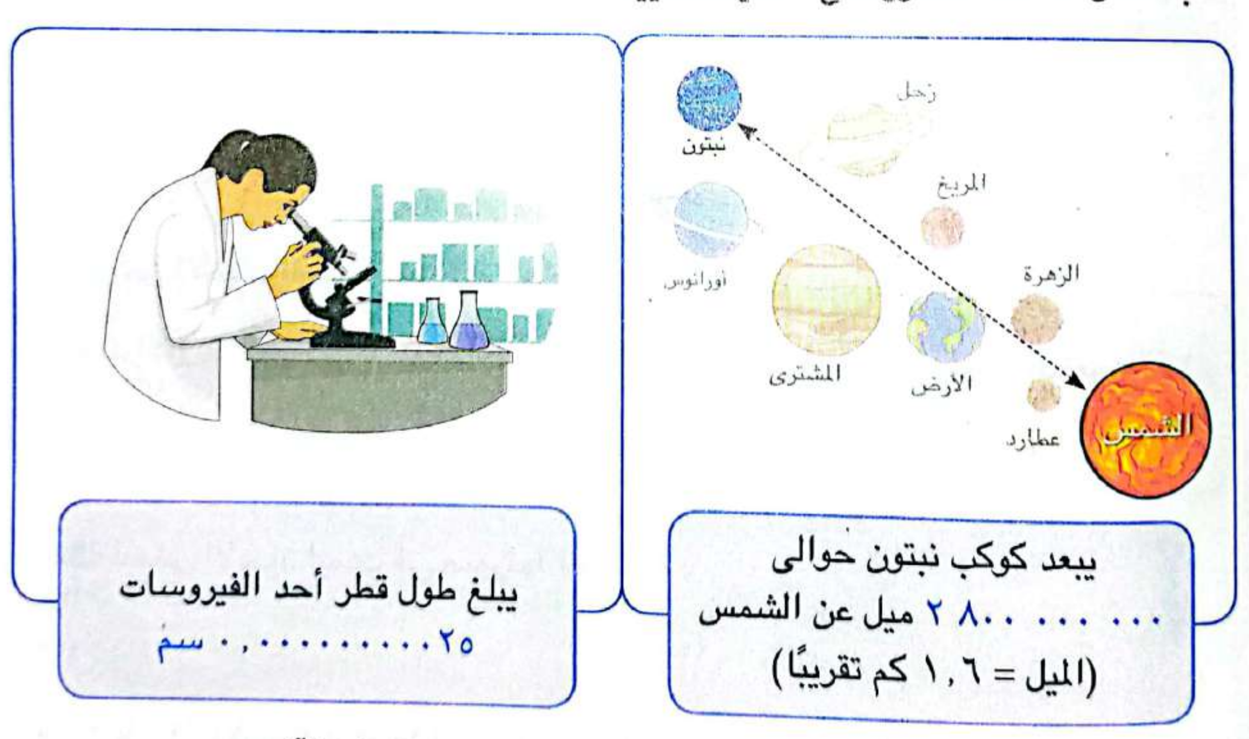
١٨ بدون فك رتب الأعداد الآتية ترتيبًا تصاعديًا بمجرد النظر :

$(-٢)^{-١٥}$ ، $(-٥)^{٢٠}$ ، $(-٢)^{١٥}$ ، $(٢)^{-٢٠}$ ، $(-٥)^{١٥}$ ، $(-٢)^{٢٠}$

الدرس 4 الصورة القياسية للعدد النسبى



• الصورة القياسية للعدد هى طريقة مفيدة للتعامل مع الأعداد الكبيرة جدًا أو الأعداد الصغيرة جدًا مثل الأعداد المذكورة في المثالين التاليين.



• وقبل شرح كيفية كتابة الأعداد فى صورتها القياسية يجب ملاحظة الآتى :

١ $١٠ = ١٠^{١}$ ، $١٠٠ = ١٠ \times ١٠ = ١٠^{٢}$ ، $١٠٠٠ = ١٠ \times ١٠ \times ١٠ = ١٠^{٣}$ ، وهكذا

وعلى هذا فإن :

$٢٠٠٠ = ٢ \times ١٠٠٠ = ٢ \times ١٠^{٣}$ ، $٥٠٠٠٠ = ٥ \times ١٠٠٠٠ = ٥ \times ١٠^{٤}$

٢ $٠,١ = \frac{١}{١٠} = ١٠^{-١}$ ، $٠,٠١ = \frac{١}{١٠٠} = \frac{١}{١٠ \times ١٠} = ١٠^{-٢}$ ،

$٠,٠٠١ = \frac{١}{١٠٠٠} = \frac{١}{١٠ \times ١٠ \times ١٠} = ١٠^{-٣}$ وهكذا

وعلى هذا فإن : • $٠,٠٣ = \frac{٣}{١٠٠} = \frac{٣}{١٠ \times ١٠} = ٣ \times ١٠^{-٢}$

• $٠,٠٠٠٧ = \frac{٧}{١٠٠٠٠} = \frac{٧}{١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠} = ٧ \times ١٠^{-٤}$

الصورة القياسية للعدد

يكتب العدد فى صورته القياسية على الصورة : $أ \times ١٠^{ن}$ حيث $١ \leq |أ| < ١٠$ ، $ن \in ص$

*** أمثلة لبعض الأعداد مكتوبة فى صورتها القياسية :**

• $٤,٦ \times ١٠^{٨}$

• $-٩,٦ \times ١٠^{١٠}$

• -٣×١٠^{١٢}

• $٥,٢٣٦ \times ١٠^{-٦}$

• $-١,٠٠١ \times ١٠^{-٥}$

• ١×١٠^{-٧}

كل من الأعداد السابقة عبارة عن حاصل ضرب عددين :

– العدد الأول قد يكون موجبًا أو سالبًا وقيمته المطلقة أكبر من أو تساوى واحد وأصغر من ١٠

– العدد الثانى يعبر عن قوى العدد ١٠ الموجبة أو السالبة.

*** أمثلة لبعض الأعداد ليست فى صورتها القياسية :**

• ٨٢٠٠٠٠٠٠٠٠

• ٤٥×١٠^{٨} (لأن : $٤٥ > ١٠$)

• $٠,٢٤٨ \times ١٠^{-٧}$ (لأن : $٠,٢٤٨ < ١$)

• ٠,٠٠٠٠٠٠٠١٣٥

• $٧٠٦,٤ \times ١٠^{٥}$ (لأن : $٧٠٦,٤ > ١٠$)

• $-٠,٠٠١٥ \times ١٠^{-٩}$ (لأن : $|-٠,٠٠١٥| < ١$)

والمثال التالى يوضح كيفية كتابة هذه الأعداد لتكون فى الصورة القياسية.

كتابة العدد فى الصورة القياسية

مثال ١

اكتب كلًا من الأعداد التالية فى الصورة القياسية :

١ $٨\ ٢٠٠\ ٠٠٠\ ٠٠٠$	٢ $٠,٠٠٠٠٠٠١٣٥$	٣ ٤٥×١٠^{٨}
٤ $٧٠٦,٤ \times ١٠^{٥}$	٥ $٠,٢٤٨ \times ١٠^{-٧}$	٦ $-٠,٠٠١٥ \times ١٠^{-٩}$

الحـــل

١ $٨\ ٢٠٠\ ٠٠٠\ ٠٠٠,٠ = ٨,٢ \times ١٠^{٩}$

تحريك العلامة العشرية ٩ أرقام لليسار — استخدام القوة ٩ للعدد ١٠

٢ $٠,٠٠٠٠٠٠١٣٥ = ١,٣٥ \times ١٠^{-٧}$

تحريك العلامة العشرية ٧ أرقام لليمين — استخدام القوة -٧ للعدد ١٠

٣ لوضع العدد $٤٥,٠ \times ١٠^{٨}$ فى الصورة القياسية نحرك العلامة العشرية رقمًا واحدًا لليسار ثم نضرب فى ١٠

$$\therefore ٤٥,٠ \times ١٠^{٨} = ٤,٥ \times ١٠^{٨} \times ١٠ = ٤,٥ \times ١٠^{٩}$$

٤ لوضع العدد $٧٠٦,٤ \times ١٠^{٥}$ فى الصورة القياسية نحرك العلامة العشرية رقمين لليسار ثم نضرب فى $١٠^{٢}$

$$\therefore ٧٠٦,٤ \times ١٠^{٥} = ٧,٠٦٤ \times ١٠^{٥} \times ١٠^{٢} = ٧,٠٦٤ \times ١٠^{٧}$$

٥ لوضع العدد $٠,٢٤٨ \times ١٠^{-٧}$ فى الصورة القياسية نحرك العلامة العشرية رقمًا واحدًا لليمين ثم نضرب × $١٠^{-١}$

$$\therefore ٠,٢٤٨ \times ١٠^{-٧} = ٢,٤٨ \times ١٠^{-٧} \times ١٠^{-١} = ٢,٤٨ \times ١٠^{-٨}$$

٦ لوضع العدد $-٠,٠٠١٥ \times ١٠^{-٩}$ فى الصورة القياسية نحرك العلامة العشرية ثلاثة أرقام لليمين ثم نضرب فى $١٠^{-٣}$

$$\therefore -٠,٠٠١٥ \times ١٠^{-٩} = -١,٥ \times ١٠^{-٩} \times ١٠^{-٣} = -١,٥ \times ١٠^{-١٢}$$

ملاحظة

الصورة القياسية للعدد ١ هى $١ \times ١٠^{\text{صفر}}$ ، وكذلك العدد ٢ هى $٢ \times ١٠^{\text{صفر}}$ ، وهكذا ...

حاول بنفسك ١

فيما يأتى عين الأعداد التى ليست على الصورة القياسية واكتبها على الصورة القياسية :

١ $٨,٥ \times ١٠^{-٤}$	٢ ١٧×١٠^{٨}	٣ $٠,٠٥ \times ١٠^{-٧}$
٤ $٥٣٠,٥ \times ١٠^{٩}$	٥ $-٠,٩٩٩ \times ١٠^{-٥}$	٦ ٦×١٠^{٦}
٧ $٦٥٠ \; ٠٠٠ \; ٠٠٠$	٨ $٠,٠٠٠٠٠٠١٠٢$	٩ $-٢,٥ \times ١٠^{٨}$

العمليات على الأعداد فى الصورة القياسية

مثال ٢

اكتب ناتج كل مما يأتى على الصورة القياسية :

١ $(١,٢ \times ١٠^{٥}) \times (٤ \times ١٠^{٣})$

٢ $(٦,٥ \times ١٠^{٤}) \times (٨ \times ١٠^{٢})$

٣ $(٢,٤ \times ١٠^{١١}) \div (١,٢ \times ١٠^{-٤})$

٤ $(٦,٦ \times ١٠^{٧}) \times (٣ \times ١٠)^{٤}$

٥ $(٢,٣ \times ١٠^{٦}) + (٣,٧ \times ١٠^{٥})$

الحـــل

١ $(١,٢ \times ١٠^{٥}) \times (٤ \times ١٠^{٣}) = (١,٢ \times ٤) \times (١٠^{٥} \times ١٠^{٣}) = ٤,٨ \times ١٠^{٨}$

٢ $(٦,٥ \times ١٠^{٤}) \times (٨ \times ١٠^{٢}) = (٦,٥ \times ٨) \times (١٠^{٤} \times ١٠^{٢})$

$= ٥٢ \times ١٠^{٦}$

$= ٥,٢ \times ١٠^{٧}$

> **لاحظ أن :**
> ٥٢×١٠^{٦} ليست على الصورة القياسية فيجب تحويلها للصورة القياسية كما سبق.

٣ $(٢,٤ \times ١٠^{١١}) \div (١,٢ \times ١٠^{-٤}) = \frac{٢,٤}{١,٢} \times \frac{١٠^{١١}}{١٠^{-٤}} = ٢ \times ١٠^{١٥}$

٤ $(٦,٦ \times ١٠^{٧}) \times (٣ \times ١٠)^{٤} = (٦,٦ \times ١٠^{٧}) \times (٣^{٤} \times ١٠^{٤}) = (٦,٦ \times ٣^{٤}) \times (١٠^{٧} \times ١٠^{٤})$

$= ٥٣٤,٦ \times ١٠^{١١} = ٥,٣٤٦ \times ١٠^{١٣}$

٥ $(٢,٣ \times ١٠^{٦}) + (٣,٧ \times ١٠^{٥}) = ١٠^{٥} \, (٢,٣ \times ١٠ + ٣,٧) = ١٠^{٥} \, (٢٣ + ٣,٧)$

$= ١٠^{٥} \times ٢٦,٧ = ٢,٦٧ \times ١٠^{٦}$

مثال ٣

اكتب ناتج كل مما يأتي على الصورة القياسية :

١ $٣٠\,٠٠٠ \times ٤٠٠\,٠٠٠$ | ٢ $١٤٠\,٠٠٠ \times ٠,٠٠٥$ | ٣ $٠,٠٠٠٠١٥ \div ٣٠$

٤ $(٥٠\,٠٠٠)^{٣}$ | ٥ $(٠,٠٠٠٣)^{٥}$ | ٦ $(-٠,٠٠١)^{٦}$

الحل

١ $٣٠\,٠٠٠ \times ٤٠٠\,٠٠٠ = (٣ \times ١٠^{٤}) \times (٤ \times ١٠^{٥})$

$= (٣ \times ٤) \times (١٠^{٤} \times ١٠^{٥}) = ١٢ \times ١٠^{٩} = ١,٢ \times ١٠^{١٠}$

٢ $١٤٠\,٠٠٠ \times ٠,٠٠٥ = (١,٤ \times ١٠^{٥}) \times (٥ \times ١٠^{-٣})$

$= (١,٤ \times ٥) \times (١٠^{٥} \times ١٠^{-٣}) = ٧ \times ١٠^{٢}$

٣ $٠,٠٠٠٠١٥ \div ٣٠ = (١,٥ \times ١٠^{-٥}) \div (٣ \times ١٠)$

$= \frac{١,٥}{٣} \times \frac{١٠^{-٥}}{١٠} = ٠,٥ \times ١٠^{-٦} = ٥ \times ١٠^{-٧}$

٤ $(٥٠\,٠٠٠)^{٣} = (٥ \times ١٠^{٤})^{٣} = ٥^{٣} \times ١٠^{١٢} = ١٢٥ \times ١٠^{١٢} = ١,٢٥ \times ١٠^{١٤}$

٥ $(٠,٠٠٠٣)^{٥} = (٣ \times ١٠^{-٤})^{٥} = ٣^{٥} \times ١٠^{-٢٠} = ٢٤٣ \times ١٠^{-٢٠} = ٢,٤٣ \times ١٠^{-١٨}$

٦ $(-٠,٠٠١)^{٦} = (٠,٠٠١)^{٦} = (١ \times ١٠^{-٣})^{٦} = ١^{٦} \times ١٠^{-١٨} = ١٠^{-١٨}$

حاول بنفسك ٢

اكتب ناتج كل مما يأتي على الصورة القياسية :

١ $(٥,٣ \times ١٠^{٧}) \times (٣ \times ١٠^{٥})$ | ٢ $٢٠ \div ٠,٠٠٠٦$

٣ $(٤٠٠\,٠٠٠)^{٢}$ | ٤ $(٣,٢ \times ١٠^{٩}) - (٠,٢ \times ١٠^{٨})$

إجابات حاول بنفسك

١ (٢) $١,٧ \times ١٠^{٩}$ (٣) ٥×١٠^{-٨} (٤) $٥,٣٠٥ \times ١٠^{١١}$ (٥) $-٩,٩٩ \times ١٠^{-٦}$

(٧) $٦,٥ \times ١٠^{٨}$ (٨) $١,٠٢ \times ١٠^{-٦}$

٢ (١) $١,٥٩ \times ١٠^{١٣}$ (٢) ٣×١٠^{-٥} (٣) $١,٦ \times ١٠^{١١}$ (٤) $٣,١٨ \times ١٠^{٩}$




تمارين 4



على الصورة القياسية للعدد النسبى




اختبار تفاعلى

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ أى من الأعداد الآتية على الصورة القياسية :

١ $٥{,}٣ \times ١٠^{٧}$	٢ $٠{,}٢ \times ١٠^{-٤}$	٣ $٠{,}٠٢٥ \times ١٠^{٨}$
٤ ٧×١٠^{-٤}	٥ ١٠×١٠^{-١٠}	٦ $٤{,}٢٥ \times ١٠$
٧ $٣٣{,}٩ \times ١٠^{٦}$	٨ $-٥{,}٧٨٢ \times ١٠^{٣}$	٩ $-٠{,}٠٠٠٣ \times ١٠^{٣}$

٢ اكتب كلاً من الأعداد الآتية على الصورة القياسية :

١ ٦٠٠ ٠٠٠	٢ −٢٠ ٠٠٠	٣ ٧ مليون
٤ ١٩ مليون	٥ ٤٦ ٨٧٠ ٠٠٠	٦ ٥٨

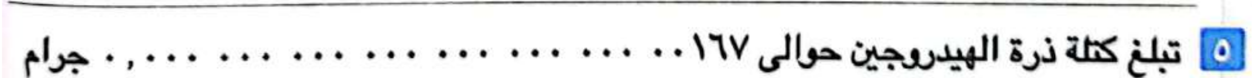
٣ اكتب كلاً من الأعداد الآتية على الصورة القياسية :

١ ٠,٠٠٠ ٦	٢ ٠,٠٠٠ ٠٥٣	٣ ٠,٠٠٠ ٨٦٤
٤ ٠,٤٢١	٥ ٢٥,٠٠٠ ٣	٦ −٣٠٠٠.٥٠١

٤ تبلغ مساحة سطح الكرة الأرضية حوالى ٥١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ كم²

اكتب ذلك فى الصورة القياسية.





٥ تبلغ كتلة ذرة الهيدروجين حوالى ٠,٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠١٦٧ جرام

اكتب ذلك فى الصورة القياسية.

٦ تبلغ سرعة الضوء ٣٠٠ ٠٠٠ كم / ث

عبر عن سرعة الضوء بالمتر/ ث

فى الصورة القياسية.




٧ اكتشف الدكتور أحمد زويل الفمتو ثانية
وهى جزء من مليون مليار جزء من الثانية
عبر عن ذلك فى الصورة القياسية.



٨ عند كتابة العدد $٢,٧٤ \times ١٠^{٢٠}$ على صورة عدد صحيح أوجد عدد الأصفار التى تقع على يمين العدد ٤

٩ اكتب الأعداد الآتية على الصورة القياسية :

١) ٦٨×١٠^{٥}
٢) ٦٨×١٠^{-٥}
٣) ٧٢٠×١٠^{٦}
٤) ٧٥٠×١٠^{-٩}
٥) $-٣٢,٤ \times ١٠^{٤}$
٦) $-٧٠٢,٥ \times ١٠^{-٨}$
٧) $٠,٤ \times ١٠^{-١٠}$
٨) $٠,٠٠٠٥ \times ١٠^{١٥}$
٩) $٠,٠٠٣٦ \times ١٠^{-٤}$
١٠) $٠,٠٠٢٠٢٠٥ \times ١٠^{١٢}$

١٠ ضع العلامة المناسبة (< أو >) :

١) $٦,٤ \times ١٠^{٣}$ ☐ $٤,٦ \times ١٠^{٣}$
٢) $٦,٢ \times ١٠^{٤}$ ☐ $٤,١ \times ١٠^{٥}$
٣) $٠,٠٠٤١$ ☐ $٣,٢ \times ١٠^{-٢}$
٤) ٤٣٧٠ ☐ $٣,٤١ \times ١٠^{٤}$
٥) $٢,١٠ \times ١٠^{-٥}$ ☐ $١,٨٢ \times ١٠^{-٥}$
٦) $٩,١ \times ١٠^{-٤}$ ☐ $١,٢ \times ١٠^{-٥}$
٧) $٦,٩٢٠ \times ١٠^{٥}$ ☐ ٩٦٢٣٠
٨) $٣,٦٩ \times ١٠^{-٤}$ ☐ $٠,٠٠٠٦٢٣$

١١ رتب الأعداد الآتية تنازليًا :

$٣,٦ \times ١٠^{-٣}$ ، $٥,٢ \times ١٠^{-٥}$ ، ١×١٠^{-٢} ، $٨,٣٥ \times ١٠^{-٢}$ ، $٦,٠٨ \times ١٠^{-٨}$

١٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) $٣,٠٤ \times ١٠^{٧} =$ ....

(أ) ٣٤٠٠٠٠ (ب) ٣٠٤٠٠٠٠ (جـ) ٣٤٠٠٠٠٠ (د) ٣٠٤٠٠٠٠٠

[٢] $٢,٣٧ \times ١٠^{-٤}$ = ...

(أ) ٠,٠٠٢٣٧ (ب) ٠,٠٠٠٢٣٧ (جـ) ٢٣٧٠٠ (د) ٠,٠٠٠٠٢٣٧

[٣] إذا كان : ٠,٠٠٧٩ = ٧,٩ × ل فإن : ل = ...

(أ) $١٠^{٣}$ (ب) $١٠^{-٣}$ (جـ) $١٠^{-٤}$ (د) $١٠^{٤}$

[٤] إذا كان : ٠,٠٠٠٠٥٠٣ = م × $١٠^{-٥}$ فإن : م = ...

(أ) ٥٠٣ (ب) ٥,٠٣ (جـ) ٥٠,٣ (د) ٠,٥٠٣

[٥] إذا كان سُمك ورقة ٠,٠١٢ سم أى من الآتى يكون ارتفاع رزمة من ٤٠٠ ورقة ؟

(أ) (٤٨×١٠^{-٣}) سم (ب) (٤٨×١٠^{-٢}) سم

(جـ) ($٤,٨ \times ١٠^{\text{صفر}}$) سم (د) ٤٨ سم

[٦] أى مما يأتى يساوى $\frac{١}{٢}$ مليار ؟

(أ) ٥٠×١٠^{٨} (ب) ٥×١٠^{٨} (جـ) $٠,٥ \times ١٠^{٨}$ (د) ٥٠٠×١٠^{٧}

[٧] أى من الآتى هو الأكبر ؟

(أ) $٦,٣ \times ١٠^{٥}$ (ب) $٩,٨ \times ١٠^{٤}$ (جـ) $٥,٢ \times ١٠^{٥}$ (د) $٧,٣ \times ١٠^{٤}$

[٨] أى من الآتى هو الأصغر ؟

(أ) $٠,٦ \times ١٠^{٥}$ (ب) $٠,٢٥ \times ١٠^{٥}$ (جـ) ٧×١٠^{٤} (د) $١٧,٥ \times ١٠^{٤}$

[٩] ٦٠٠٠ × ٥٠ = ...

(أ) ٣٠٠×١٠^{٢} (ب) ٣٠×١٠^{٥} (جـ) ٣×١٠^{٥} (د) ٣٠×١٠^{٣}

[١٠] ٤٥ × ٩٠٠ = ...

(أ) $٤,٠٥ \times ١٠^{٢}$ (ب) $٤,٠٥ \times ١٠^{٣}$ (جـ) $٤,٠٥ \times ١٠^{٤}$ (د) ٤٥×١٠^{٢}

[١١] ٠,٧ × ٠,٠٠٥ = ...

(أ) $٣,٥ \times ١٠^{٣}$ (ب) $٣,٥ \times ١٠^{-٢}$ (جـ) $٣,٥ \times ١٠^{٢}$ (د) $٣,٥ \times ١٠^{-٣}$

١٣ اكتب ناتج كل مما يأتي على الصورة القياسية :

١ $(٦{,}٤ \times ١٠^{٨}) \times (١{,}٥ \times ١٠^{٥})$

٢ $(٨{,}٢ \times ١٠^{٧}) \times (٢{,}١ \times ١٠^{-٤})$

٣ $(٥{,}٠٢ \times ١٠^{-٤}) \times (٠{,}١ \times ١٠^{-٣})$

٤ $(٤{,}٤ \times ١٠^{٣}) \times (٢ \times ١٠)^{٥}$

٥ $(٣{,}٨ \times ١٠^{٨}) \div (١{,}٩ \times ١٠^{٦})$

٦ $(١٢٥{,}٥ \times ١٠^{-٣}) \div (٥ \times ١٠^{٤})$

٧ $(٨{,}٨ \times ١٠^{٢٥}) \div (٨{,}٨ \times ١٠^{٢٢})$

٨ $(٥ \times ١٠)^{٤} \div (٢{,}٥ \times ١٠^{-٣})$

١٤ اكتب ناتج كل مما يأتي على الصورة القياسية :

١ $(٣{,}٨ \times ١٠^{٥}) + (٤{,}٦ \times ١٠^{٤})$

٢ $(٤{,}٥٤ \times ١٠^{٤}) + (٣{,}٧٦ \times ١٠^{٣})$

٣ $(٥{,}٣ \times ١٠^{٨}) - (٠{,}٨ \times ١٠^{٧})$

٤ $(٢{,}٦٥ \times ١٠^{-٢}) - (٦{,}٢٤ \times ١٠^{-٣})$

١٥ اكتب ناتج كل مما يأتي على الصورة القياسية :

١ $٥\,٠٠٠ \times ٣\,٠٠٠$

٢ $٤٠٠ \times ٠{,}٠٠٠\,٠٧$

٣ $٨\,٠٠٠ \div ٠{,}٠٠٤$

٤ $٠{,}٠٠٠\,٠٣٣ \div ٥٠٠$

٥ $(٢٠\,٠٠٠)^{٣}$

٦ $(٠{,}٠٠٢)^{٢}$

٧ $(٠{,}١)^{-٨}$

١٦ أوجد قيمة ن فى كل مما يأتى :

١ $٨٠٠\,٠٠٠ = ٨ \times ١٠^{ن}$

٢ $٠{,}٠٠٠\,٠٠٠\,٠٦ = ٦ \times ١٠^{ن}$

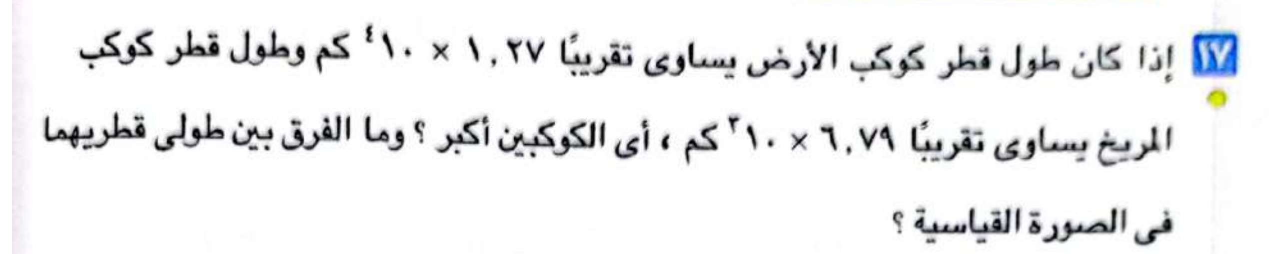
٣ $٠{,}٠٠٠\,٥٢ = ٥{,}٢ \times ١٠^{ن}$

٤ $٠{,}٠٠٠\,٣٥٧ = ٣{,}٥٧ \times ١٠^{ن}$

٥ $(٠{,}٠٠٤)^{٢} = ١{,}٦ \times ١٠^{ن}$

٦ $٧٦٢٩٣ = ن \times ١٠^{٤}$

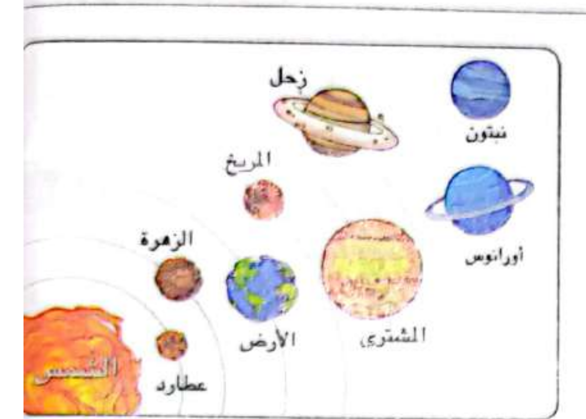
تطبيقات حياتية



١٧ إذا كان طول قطر كوكب الأرض يساوى تقريبًا $١,٢٧ \times ١٠^{٤}$ كم وطول قطر كوكب المريخ يساوى تقريبًا $٦,٧٩ \times ١٠^{٣}$ كم ، أى الكوكبين أكبر ؟ وما الفرق بين طولى قطريهما فى الصورة القياسية ؟

١٨ إذا كانت سرعة الضوء ٣×١٠^{٨} م/ث :

(أ) احسب المسافة بين الشمس والأرض إذا علمت أن ضوء الشمس يصل إلى الأرض فى ٨ دقائق.



(ب) إذا كانت المسافة بين الزهرة والشمس ١٠٨ مليون كم

احسب الوقت المستغرق بالدقائق ليصل الضوء إلى الزهرة من الشمس.

للمتفوقين

١٩ أوجد ناتج ما يأتى فى الصورة القياسية : $\frac{٩,٠٢ \times ١٠^{٣} + ٤,٩٨ \times ١٠^{٤}}{٢,٥ \times ١٠^{-٥}}$

٢٠ بدون استخدام الآلة الحاسبة اكتب كلاً من العددين الآتيين فى الصورة القياسية :

١ $١٠^{٢٩} - ١٠^{٢٨}$ ٢ $٢^{١٩} \times ٥^{١٥}$

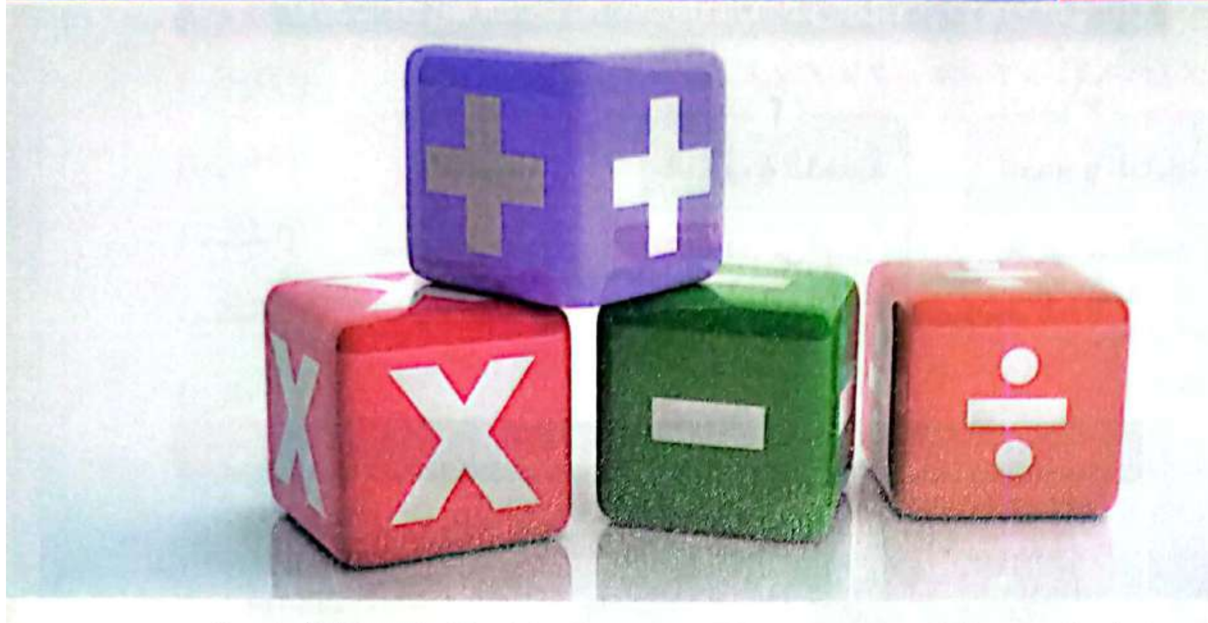
٢١ إذا كان : $س = ٥ + (٣ \times ١٠) + (٤ \times ١٠^{٢}) + (٦ \times ١٠^{٣})$

$+ (٩ \times ١٠^{٤}) + (٤ \times ١٠^{٥}) + (٢ \times ١٠^{٦})$

اكتب بدون استخدام الآلة الحاسبة العدد س فى الصورة القياسية.

الدرس 5

ترتيب إجراء العمليات الرياضية



من المعروف أن عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة هى العمليات الرياضية الأساسية التى تُجرى على الأعداد ، وفى بعض الأحيان تأتى العمليات الأربعة كلها أو بعضها فى مسألة واحدة مما يستلزم الاتفاق على قواعد تحدد لنا أولوية تنفيذ هذه العمليات.

والموقف التالى يوضح أهمية ذلك.

أُعطيت المسألة الآتية لكل من أحمد وهبة : **احسب قيمة : ٣ + ٤ × ٢**

فكانت إجابتهما كالتالى :



أحمد قام بعملية الجمع أولًا، ثم عملية الضرب فحصل على : (١٤)

٣ + ٤ × ٢ =
٣ + ٨ = ١١

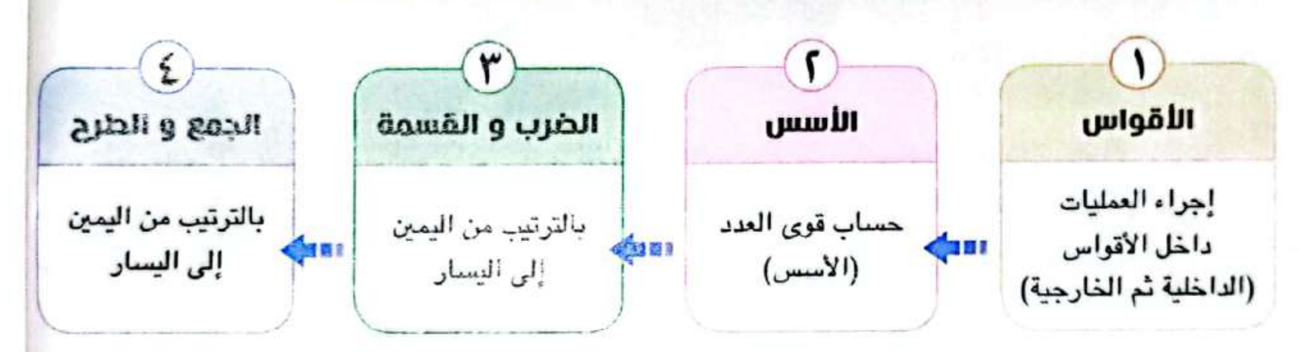
هبة قامت بعملية الضرب أولًا، ثم عملية الجمع فحصلت على : (١١)

ونظرًا لاختلاف النتائج فى مثل هذه العمليات تأتى أهمية الاتفاق على بعض القواعد التى تحدد لنا ترتيب إجراء العمليات الرياضية وهى :

أولًا ترتيب إجراء العمليات الرياضية فى مقدار بدون أقواس



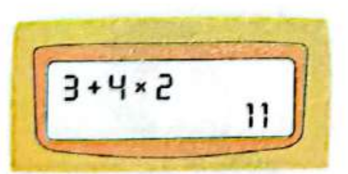
ثانيًا ترتيب إجراء العمليات الرياضية فى مقدار به أقواس



* طبقًا لهذه القواعد ، فإن هبة هى التى أجابت الإجابة الصحيحة لأنها أجرت عملية الضرب أولًا ثم عملية الجمع.

لاحظ أن :

الآلات الحاسبة الحديثة وأجهزة الكمبيوتر تتبع نفس الترتيب السابق لإجراء العمليات الرياضية.



مثال ٢

احسب قيمة كل مما يلى :

١ $٣ + ٦ \times (٥ + ٤) \div ٣ - ٧$

٢ $٩ - ٥ \div (٨ - ٣) \times ٢ + ٦$

الحـــل

١ ٣ + ٦ × (٥ + ٤) ÷ ٣ − ٧ = ٣ + ٦ × ٩ ÷ ٣ − ٧ (الأقواس)

= ٣ + ٥٤ ÷ ٣ − ٧ (الضرب)

= ٣ + ١٨ − ٧ (القسمة)

= ٢١ − ٧ (الجمع)

= ١٤ (الطرح)

٢ ٩ − ٥ ÷ (٨ − ٣) × ٢ + ٦ = ٩ − ٥ ÷ ٥ × ٢ + ٦ (الأقواس)

= ٩ − ١ × ٢ + ٦ (القسمة)

= ٩ − ٢ + ٦ (الضرب)

= ٧ + ٦ (الطرح)

= ١٣ (الجمع)

مثال ٢

احسب قيمة كل مما يأتى :

١ ٤ − ٣ [٤ − ٢ (٦ − ٣)] ÷ ٢

٢ ١٦ ÷ [٨ − ٣ (٤ − ٢)] + ١

الحـــل

١ ٤ − ٣ [٤ − ٢ (٦ − ٣)] ÷ ٢ = ٤ − ٣ [٤ − ٢ × ٣] ÷ ٢ (القوسين الداخليين)

= ٤ − ٣ [٤ − ٦] ÷ ٢ (الضرب داخل القوسين)

= ٤ − ٣ [−٢] ÷ ٢ (الطرح داخل القوسين)

= ٤ + ٦ ÷ ٢ (الضرب فى القوسين)

= ٤ + ٣ (القسمة)

= ٧ (الجمع)

٢ $١٦ \div [٨ - ٣(٤ - ٢)] + ١ = ١٦ \div [٨ - ٣ \times ٢] + ١$ (القوسين الداخليين)

$= ١٦ \div [٨ - ٦] + ١$ (الضرب داخل القوسين)

$= ١٦ \div ٢ + ١$ (الطرح داخل القوسين)

$= ٨ + ١$ (القسمة)

$= ٩$ (الجمع)

مثال ٣

احسب قيمة كل مما يأتى :

١ $٨ \times ٢^{٢} - ٧ \times (٤ + ١)$

٢ $٢ + ٣ [٥ + (٤ - ١)^{٢}]$

٣ $٣ [(٣^{٢} + ١) - (٢^{٣} - ٢)]$

الحل

١ $٨ \times ٢^{٢} - ٧ \times (٤ + ١) = ٨ \times ٢^{٢} - ٧ \times ٥$ (الجمع داخل القوسين)

$= ٨ \times ٤ - ٧ \times ٥$ (الأسس)

$= ٣٢ - ٣٥$ (الضرب)

$= -٣$ (الطرح)

٢ $٢ + ٣ [٥ + (٤ - ١)^{٢}] = ٢ + ٣ [٥ + ٣^{٢}]$ (الطرح داخل القوسين الداخليين)

$= ٢ + ٣ [٥ + ٩]$ (الأسس داخل القوسين)

$= ٢ + ٣ \times ١٤$ (الجمع داخل القوسين)

$= ٢ + ٤٢$ (الضرب)

$= ٤٤$ (الجمع)

٣ $٣ [(٣^{٢} + ١) - (٢^{٣} - ٢)] = ٣ [(٩ + ١) - (٨ - ٢)]$ (الأسس)

$= ٣ [١٠ - ٦]$ (الأقواس الداخلية)

$= ٣ \times ٤$ (الطرح داخل القوسين)

$= ١٢$ (الضرب)

! ملاحظة

في المسائل التي تحتوي على شرطة كسر يجب إجراء العمليات الرياضية في البسط والمقام قبل إجراء عملية القسمة.

مثال ٤

احسب قيمة كل مما يأتي :

١ $\frac{٣٦ - ٦}{٣ + ١٢}$

٢ $\frac{١١ - (٥ - ٤)}{٥^{٢} - ١٠ \times ٢}$

٣ $٧ + ٨ \div \frac{٤ + ١٢ - ٢}{٣^{٢} - ٢} - (٢^{٣} + ٢)$

الحل

١ $\frac{٣٦ - ٦}{٣ + ١٢} = \frac{٣٠}{١٥} = ٢$

٢ $\frac{١١ - (٥ - ٤)}{٥^{٢} - ١٠ \times ٢} = \frac{١١ - ١}{٢٥ - ٢٠} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

٣ $٧ + ٨ \div \frac{٤ + ١٢ - ٢}{٣^{٢} - ٢} - (٢^{٣} + ٢) = ٧ + ٨ \div \frac{١٤}{٧} - (٢^{٣} + ٢)$

$= ٧ + ٨ \div ٢ - ١٠ = ٧ + ٤ - ١٠ = ١$

حاول بنفسك

احسب قيمة كل مما يأتي :

١ $٢٠ \div (١٢ - ٢) \times ٣^{٢} - ٢$

٢ $\frac{٦ \times ٣ + ١٠ \div ٥}{٢ - (١٠ - ٢^{٢})}$

① ١٦ ② -٥



تمارين 5

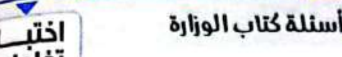
على ترتيب إجراء العمليات الرياضية





اختبار تفاعلي

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة



١ احسب قيمة كل مما يلي :

١) ٣ + ١٢ ÷ ٦

٢) ٢ × ٦ − ٤ ÷ ٢

٣) ٤ × ٧ − ٣^{٢}

٤) ٤ × ٢^{٣} − ٢٠

٥) ٩ + ٤ × ٣^{٢}

٦) ١٤٤ − ٨ ÷ ٢^{٣}

٢ احسب قيمة كل مما يأتى :

١) ١٩٦ ÷ (٧ − ٥)^{٢}

٢) ١٨ ÷ (٩ − ٦) × (١ + ٢)

٣) ٢٠ ÷ ٥ + ٨ − (٤ − ١)

٤) ١٠ × ٤ − (٢ × ٦ − ٨)

٥) (٧ − ٤) × ٢ ÷ (٥ − ٣)

٦) (٣٠ − ٦) ÷ ٦ × ٣٠ ÷ ٣

٧) ٧ (٦^{٢} ÷ ٢ × ٣)

٨) ١٢ (٢^{٢}) ÷ ٢٤ + ٣^{٢}

٩) ٩ (٤^{٢}) ÷ ٢^{٢} × ٣

١٠) ٩ × ١٠ + ٢٠ ÷ ٢ − ٣

١١) ٦ ÷ $\frac{١}{٣}$ × ٣ − $\frac{١}{٣}$ × ٩

١٢) ٨ × $\frac{١}{٢}$ ÷ ٢ − ٣ ÷ $\frac{١}{٥}$

٣ احسب قيمة كل مما يأتى :

١) ٢ − [(٧ − ٣) − ٢]

٢) [٤ − (٥ − ٢)] − ١

٣) ٣ + [٥ + ٢ (٨ ÷ ٤)]

٤) ٢^{٣} + [٤ + (٢ − ١)]

٥) [(٢ + ٢٣ − ٧) × ٢] ÷ ٤

٦) ١٠ × ٣ ÷ [٤ − (٩ − ٨)]

٧) ٢ + ٣ [٤ + (٦ × ٣ − ٨)] × ٢

٨) ٢ [(٥^{٢} + ١) − (٤^{٢} − ١)]

٩) ٧ − [١٠ − (−٨)] − ٣

١٠) [١١ − (−١٠)] × ٢ ÷ (−٦)

٤ احسب قيمة كل مما يأتي :

١ $\frac{١٥ + ٧}{١٥ - ٤}$

٢ $\frac{٨ + ٢٠ - ٤}{٨ - ٤}$

٣ $\frac{-٤ \times (-١٠)}{-٩ + ٧}$

٤ $\frac{١ + ١٥}{٨ - (٢ - ٢)}$

٥ $\frac{١١ - (٥ - ٤)}{١ + ٤}$

٦ $(٣ - ١)^{٢} + \frac{٧ \times ٣}{-١ - ٦} - \frac{٢ \times ١٥}{٦}$

٧ $\frac{٥^{٢} - ٥ \times ٢}{(١٥ + ٣) \div ٦}$

٨ $\frac{٥ + ٢ \times ٥}{٢^{٢} + ١} + ٥^{٢} - ٥$

٩ $\frac{٣^{٢} \times ٦ \div ٣}{٢ \times ١ + (٣ + ١)^{٢}}$

٥ إذا كانت : س = ٣ فما قيمة المقدار : $٢ \left(\frac{٥س + ٣}{٤س - ٣}\right)$ ؟ «٤»

٦ أوجد القيمة العددية لكل مقدار مما يلي عندما س = ٢ ، ص = ٥ :

١ $(س + ص)^{٢}$

٢ $(ص - س)^{٢}$

٣ $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٢}$

٤ $\frac{٦^{٢}}{ص - ١}$

٥ $\frac{ص - س}{ص^{٢}}$

٦ $\frac{١٢}{٤ ص^{٢}}$

٧ أوجد قيمة المقدار : ١٦ أ ÷ (٤ ب) + ٣ ب أ عندما أ = ٩ ، ب = ٦ «١٦٨»

٨ إذا كانت : س = ٣ (٥ + ٧) − ٤ ، ص = ٤ (٨ + ٢) ÷ ٥

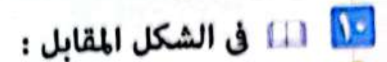
فأوجد القيمة العددية للمقدار : س − ٤ ص «صفر»

٩ إذا كانت : س = ١٨ − ٤ × ٢ ÷ ٢ + ١ ، ص = ٨ + ٩ × ٣ − $٤^{٢}$ + ١١

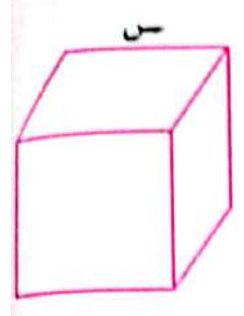
فأوجد القيمة العددية للمقدار : $\left(\frac{ص}{س}\right)^{-٣}$ «$\frac{١}{٨}$»



تطبيقات هندسية



١٠ في الشكل المقابل :



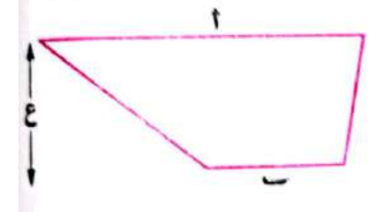
أوجد المساحة الكلية للمكعب إذا كان طول حرفه :

١ س = ٣ أمتار　　　　٢ س = ٠,٨ سم

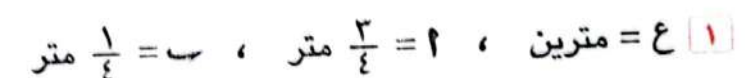
«علمًا بأن : المساحة الكلية لمكعب طول حرفه س = ٦ س^{٢}»　　«٥٤ م^{٢} ، ٣,٨٤ سم^{٢}»

---

١١ في الشكل المقابل :



أوجد مساحة شبه المنحرف إذا كان :

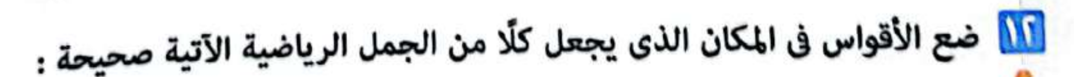


١ ع = مترين ، أ = $\frac{٣}{٤}$ متر ، ب = $\frac{١}{٤}$ متر

٢ ع = ٤ أمتار ، أ = $\frac{١}{٢}$ متر ، ب = $\frac{١}{٤}$ متر

«علمًا بأن : مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ (أ + ب) × ع»　　«١ م^{٢} ، ١,٥ م^{٢}»

للمتفوقين



١٢ ضع الأقواس فى المكان الذى يجعل كلًّا من الجمل الرياضية الآتية صحيحة :

١ ٣ + ٩٦ ÷ ١٢ × ٤ = ٥

٢ ٣ + ٩٦ ÷ ١٢ × ٤ = ٣٥

٣ ٣ + ٩٦ ÷ ١٢ × ٤ = ٣٣

الدرس 6

الجذر التربيعى لعدد نسبى مربع كامل



تعريف

الجذر التربيعى للعدد النسبى المربع الكامل ٢ هو العدد الذى مربعه يساوى ٢

فمثلًا : • العدد ٦ هو جذر تربيعى للعدد ٣٦ لأن : ٦^٢ = ٣٦

• العدد −٦ هو جذر تربيعى للعدد ٣٦ لأن : (−٦)^٢ = ٣٦

أى أن : إيجاد الجذر التربيعى هو العملية العكسية لإيجاد مربع العدد بمعنى أنه لإيجاد الجذر التربيعى لعدد ما فإننا نبحث عن عدد إذا ضُرب فى نفسه ينتج هذا العدد.

وبصفة عامة	أمثلة
• يُرمز للجذر التربيعى الموجب للعدد ٢ بالرمز $\sqrt{٢}$	الجذر التربيعى الموجب للعدد ٢٥ هو $\sqrt{٢٥}$ = ٥
• يرمز للجذر التربيعى السالب للعدد ٢ بالرمز $-\sqrt{٢}$	الجذر التربيعى السالب للعدد ١٦ هو $-\sqrt{١٦}$ = −٤
• يرمز للجذرين التربيعيين للعدد ٢ بالرمز $\pm\sqrt{٢}$ والتى تعنى : $\sqrt{٢}$ ، $-\sqrt{٢}$ وكل منهما معكوس جمعى للآخر	الجذران التربيعيان للعدد ٤٩ هما $\pm\sqrt{٤٩}$ = ±٧

ملاحظات

(١) $\sqrt{\text{صفر}}$ = صفر

(٢) في مجموعة الأعداد النسبية لا معنى لإيجاد $\sqrt{أ}$ إذا كان العدد أ عددًا نسبيًا سالبًا لأنه لا يوجد عدد نسبي إذا ضرب في نفسه يكون الناتج سالبًا.

(٣) $\sqrt{أ^{٢}} = |أ|$

فمثلًا : • $\sqrt{(-٣)^{٢}} = |-٣| = ٣$ • $\sqrt{\left(-\frac{٤}{٥}\right)^{٢}} = \left|-\frac{٤}{٥}\right| = \frac{٤}{٥}$

(٤) $\sqrt{أ^{٢} ب^{٢}} = \sqrt{(أ ب)^{٢}} = |أ ب|$

فمثلًا : $\sqrt{أ^{٤} ب^{٦}} = \sqrt{(أ^{٢} ب^{٣})^{٢}} = |أ^{٢} ب^{٣}|$

(٥) إذا كانت : $س^{٢} = أ$ حيث $أ \geq ٠$ فإن : $س = \pm \sqrt{أ}$

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

١ $\sqrt{٣٦}$

٢ $-\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}}$

٣ $\pm \sqrt{٢\frac{١}{٤}}$

٤ $\sqrt{\left(-\frac{٢}{٧}\right)^{٢}}$

٥ $-\sqrt{٠,٢٥}$

٦ $\pm \sqrt{\frac{٣,٦}{١٠}}$

٧ $\sqrt{١٦ + ٩}$

٨ $\sqrt{١٠٠ - ٣٦}$

٩ $\sqrt{\frac{٣٦ أ^{٨}}{٤٩ ء^{٤}}}$

الحل

١ $\sqrt{٣٦} = ٦$ (لأن : $٦^{٢} = ٣٦$)

٢ $-\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}} = -\frac{٤}{٥}$ (لأن : $\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٢٥}$)

٣ $\pm \sqrt{٢\frac{١}{٤}} = \pm \sqrt{\frac{٩}{٤}} = \pm \frac{٣}{٢}$

٤ $\sqrt{\left(-\frac{٢}{٧}\right)^{٢}} = \left|-\frac{٢}{٧}\right| = \frac{٢}{٧}$

٥ $-\sqrt{٠,٢٥} = -\sqrt{\frac{٢٥}{١٠٠}} = -\frac{٥}{١٠} = -\frac{١}{٢}$

٦ $\pm \sqrt{\frac{٣,٦}{١٠}} = \pm \sqrt{\frac{٣٦}{١٠٠}} = \pm \frac{٦}{١٠} = \pm \frac{٣}{٥}$

٧ $\sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$

٨ $\sqrt{١٠٠ - ٣٦} = \sqrt{٦٤} = ٨$

٩ $\sqrt{\frac{٣٦ م^{٨}}{٤٩ ء^{٤}}} = \frac{٦ م^{٤}}{٧ ء^{٢}}$

لاحظ أن :
عند وجود عملية جمع أو طرح تحت الجذر تجرى العملية أولاً قبل إيجاد الجذر.

حاول بنفسك ١

أكمل ما يأتى :

١ $\sqrt{٦٤} =$ ....

٢ $- \sqrt{٩٠٠} =$ ....

٣ $- \sqrt{\frac{٣٦}{٢٥}} =$ ....

٤ $\pm \sqrt{٦\frac{١}{٤}} =$ ....

٥ $\sqrt{٠,٦٤} =$ ....

٦ $\sqrt{١٠٠ - ٦٤} =$ ....

! ملاحظـة

فى بعض الحالات يكون من الأسهل استخدام التحليل لإيجاد الجذر التربيعى لعدد ما ، ولكى نقوم بذلك فإننا نحلل العدد المعطى إلى عوامله الأولية ، ثم نأخذ من كل عاملين متساويين عاملاً واحدًا ، فيكون حاصل ضرب هذه العوامل المأخوذة هو الجذر التربيعى لهذا العدد.

مثال ٢

أوجد : $\sqrt{٤٤١}$

الحـــل

$\because ٤٤١ = ٣ \times ٣ \times ٧ \times ٧$

$\therefore \sqrt{٤٤١} = ٣ \times ٧ = ٢١$

٤٤١	٣
١٤٧	٣
٤٩	٧
٧	٧
١	

(٣) ، (٧)

مثال ٣

اختصر كلاً مما يأتي إلى أبسط صورة :

١ $-\frac{٢}{٧} \times \sqrt{\frac{٤٩}{٤}} \times \left(\frac{٢}{٧}\right)^{٢}$ ٢ $\left(-\frac{٣}{٢}\right)^{٢} \times \sqrt{\frac{٦٤}{٩}} \times \left(\frac{٥}{٢}\right)^{\text{صفر}}$ ٣ $\left(٢\frac{٧}{٩}\right)^{٢} \div \sqrt{\frac{٢٥}{٩}}$

الحل

١ $-\frac{٢}{٧} \times \sqrt{\frac{٤٩}{٤}} \times \left(\frac{٢}{٧}\right)^{٢} = -\frac{٢}{٧} \times \frac{٧}{٢} \times \frac{٤}{٤٩} = -\frac{٤}{٤٩}$

٢ $\left(-\frac{٣}{٢}\right)^{٢} \times \sqrt{\frac{٦٤}{٩}} \times \left(\frac{٥}{٢}\right)^{\text{صفر}} = \frac{٩}{٤} \times \frac{٨}{٣} \times ١ = ٦$

٣ $\left(٢\frac{٧}{٩}\right)^{٢} \div \sqrt{\frac{٢٥}{٩}} = \left(\frac{٢٥}{٩}\right)^{٢} \div \frac{٥}{٣} = \left(\left(\frac{٥}{٣}\right)^{٢}\right)^{٢} \div \frac{٥}{٣}$

$= \left(\frac{٥}{٣}\right)^{٤} \div \frac{٥}{٣} = \left(\frac{٥}{٣}\right)^{٤ - ١} = \left(\frac{٥}{٣}\right)^{٣} = \frac{١٢٥}{٢٧}$

حاول بنفسك ٢

اختصر لأبسط صورة :

١ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \times \sqrt{\frac{٨١}{١٦}} \times \left(\frac{٧}{٩}\right)^{\text{صفر}}$ ٢ $\frac{٥}{٧} \times \sqrt{\frac{٤٩}{٣٦}} \div \left(-\frac{٥}{٣}\right)^{٢}$

مثال ٤

مثلث طول قاعدته ١٦ سم وارتفاعه ٨ سم. أوجد طول ضلع مربع مساحته تساوى مساحة هذا المثلث.

الحل

∵ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٨ = ٦٤ سم^{٢}

∴ مساحة المربع = ٦٤ سم^{٢} ∴ طول ضلع المربع = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

حاول بنفسك ٣

مربع مساحته ١,٤٤ سم^{٢} احسب محيطه.

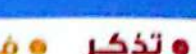


تمارين 6

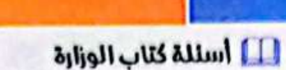
على الجذر التربيعي لعدد نسبي مربع كامل



اختبار تفاعلي



● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات



أسئلة كتاب الوزارة

١ أوجد كلاً مما يأتي :

١) $\sqrt{١٦}$
٢) $-\sqrt{٢٥}$
٣) $\pm\sqrt{٢٥٠٠}$
٤) $\pm\sqrt{٤٠٠٠٠}$
٥) $\sqrt{\frac{٩}{٤٩}}$
٦) $-\sqrt{\frac{٦٤}{٢٥}}$
٧) $\sqrt{٠,٨١}$
٨) $\pm\sqrt{١,٤٤}$
٩) $\sqrt{٦\frac{١}{٤}}$
١٠) $-\sqrt{١\frac{١١}{٢٥}}$
١١) $-\sqrt{٤^{٢}}$
١٢) $\pm\sqrt{٨^{٢}}$
١٣) $\sqrt{\left(\frac{٨١}{١٠٠}\right)^{٢}}$
١٤) $\sqrt{\left(-\frac{٣}{٤}\right)^{٢}}$
١٥) $\pm\sqrt{\frac{٥٧٦}{١٢٢٥}}$
١٦) $-\sqrt{\frac{٢,٥}{٤٠}}$
١٧) $-\sqrt{\frac{٤٩\ م^{٤}}{٢٥\ س^{٦}}}$
١٨) $\pm\sqrt{\frac{١٦\ ع^{٨}}{١٢١\ هـ^{٢}}}$
١٩) $\sqrt{\frac{٤٩\ م^{٤}\ س^{٢}}{٩}}$
٢٠) $\sqrt{\frac{٢٥\ س^{٢}\ ص^{٢}}{٣٦}}$

٢ أوجد الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد الآتية :

١) ٦٤
٢) ١٤٤
٣) $٦\frac{١}{٤}$
٤) ٠,٢٥

٣ أوجد كلاً مما يأتي :

١) $\sqrt{٩} + \sqrt{١٦}$
٢) $\sqrt{٣٦ + ٦٤}$
٣) $-\sqrt{٢٢٥ - ٨١}$
٤) $\sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢}}$
٥) $-\sqrt{(١٠)^{٢} - ٨^{٢}}$
٦) $\sqrt{\frac{٩}{١٦} + ١}$
٧) $\sqrt{\frac{٥^{٤} \times ٥^{٣}}{٥^{٥}}}$
٨) $\sqrt{\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٤}}$
٩) $\sqrt{\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{٣}}$

٤ أكمل ما يأتي :

١) $\frac{٣}{٤} \times \sqrt{\frac{١٦}{٩}} =$ ....
٢) $\sqrt{\frac{٨١}{٤٩}} \times \frac{١٤}{٢٧} =$ ....

٣ $\sqrt{\frac{٩}{٤}} - \frac{٣}{٢} + \left(\frac{٣}{٢}\right)^{\text{صفر}} =$ ....

٤ $\sqrt{٣٦} + \sqrt{١٦} = \sqrt{\cdots\cdots}$

٥ المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{\frac{٤}{٢٥}}$ فى أبسط صورة يساوى ....

٦ المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٠,٤٩}$ فى أبسط صورة يساوى ....

٧ المعكوس الضربى للعدد النسبى $\sqrt{\frac{١٠}{٢,٥}}$ يساوى ....

٨ المعكوس الجمعى للعدد $-\sqrt{\frac{٩}{١٦}}$ فى أبسط صورة يساوى ....

٩ العدد النسبى $٦\frac{١}{٤}$ على الصورة $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{٢}$ هو ....

١٠ $\sqrt{(-٣)^{٢}} =$ ....

١١ $\sqrt{أ^{٤} ب^{٨}} =$ ....

١٢ إذا كان : $أ = -\frac{١}{٢}$ ، $ب = -\frac{٩}{٨}$ فإن : $\sqrt{أ ب} =$ ....

١٣ إذا كان : $٢ س = \sqrt{٣٦}$ فإن : س = ...

١٤ إذا كان : أ = ٠,٠٠٠٦٢٥ فإن : $\sqrt{أ} = ٢,٥ \times ١٠^{\cdots}$

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ $\sqrt{١\frac{٩}{١٦}} =$ ....

(أ) $١\frac{٣}{٤}$ (ب) $-١\frac{٣}{٤}$ (جـ) $١\frac{١}{٤}$ (د) $-١\frac{١}{٤}$

٢ $\sqrt{١٠^{٢} - ٦^{٢}} =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ± ٤ (د) ± ٨

٣ $\sqrt{١٨ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٨} =$ ....

(أ) ١٨ (ب) ١٨٠ (جـ) ١٠ (د) ١٠٠

٤ $\sqrt{\sqrt{٨١}} =$ ....

(أ) ٨١ (ب) ٢٧ (جـ) ٩ (د) ٣

٥ $\sqrt{٢^٢ + \sqrt{٢٥}} = ...$

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٩ (د) −٩

٦ إذا كان : $\frac{س}{٢} = \frac{٨}{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ± ٤ (د) ١٦

٧ إذا كان : $س = \sqrt{\frac{١}{٤}}$ فإن : $س^٣ = ...$

(أ) $\frac{٣}{٨}$ (ب) $\frac{١}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{١٦}$ (د) $\frac{١}{٦٤}$

٨ $\sqrt{(أ + ب)^٢ (أ + ب)} = ...$

(أ) $(أ + ب)^٢$ (ب) $أ^٤ + ب^٤$ (جـ) $-(أ + ب)^٢$ (د) $\pm(أ + ب)^٢$

٩ $\sqrt{١} + \sqrt{٤} + \sqrt{٩} + \sqrt{١٦} + \sqrt{٢٥} + \sqrt{٣٦} + \sqrt{٤٩} + \sqrt{٦٤} = ...$

(أ) ٦ (ب) $\sqrt{٢٠٤}$ (جـ) $\sqrt{٨١}$ (د) $٦^٢$

١٠ طول ضلع المربع الذى مساحته ١٦ $س^٢$ $سم^٢$ هو .... سم.

(أ) ٨ س (ب) | ٤ س | (جـ) ٢ س (د) ٨ $س^٢$

٦ اختصر كلاً مما يأتى إلى أبسط صورة :

١ $\sqrt{\frac{٤٩}{٤}} \times \left(\frac{٢}{٧}\right)^{صفر} \times \left(-\frac{٢}{٧}\right)^٢$

٢ $\frac{٢}{٥} \times \sqrt{\frac{٩}{١٦}} \div \left(-\frac{١}{٢}\right)^٣$

٣ $\left(-\frac{١}{٣}\right)^٢ + \sqrt{\frac{٦٤}{٨١}} - \left(\frac{٣}{٤}\right)^{صفر}$

٤ $\frac{٣}{٤} \times \left(-\frac{٢}{٣}\right)^٣ \times \left(\frac{٣}{\sqrt{٤}}\right)^٢$

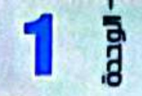
٧ اختصر كلاً مما يأتى إلى أبسط صورة :

١ $\sqrt{١٦} + \sqrt{٢٥}$

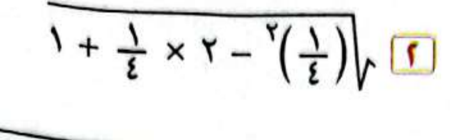
٢ $\sqrt{\sqrt{١٦} + \sqrt{٢٥}}$

٣ $\sqrt{\left(\sqrt{١٦} + \sqrt{٢٥}\right)^٢}$

٨ أوجد عددين نسبيين يقعان بين : $\sqrt{\frac{٤}{٩}}$ ، $\frac{٣}{٤}$



٩ أوجد كلاً مما يأتى :



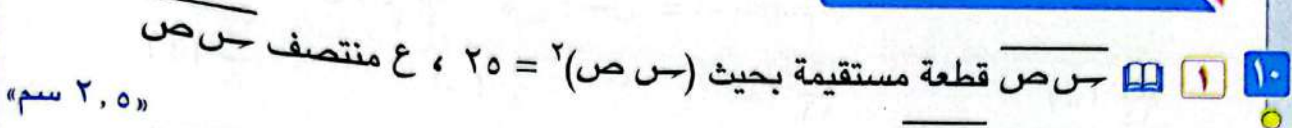
١ $\sqrt{٥^{٢} - ٢ \times ٥ + ١}$

٢ $\sqrt{\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} - ٢ \times \frac{١}{٤} + ١}$

٣ $\sqrt{٢٠ \div ٥ + ٨ - (٤ - ١)}$

٤ $\sqrt{٨ \times (٥ + ١١) \div (٢ + ٦)}$

تطبيقات هندسية



١٠ ١ $\overline{سص}$ قطعة مستقيمة بحيث $(سص)^{٢} = ٢٥$ ، ع منتصف $\overline{سص}$ «٢,٥ سم»

احسب طول $\overline{سع}$

٢ إذا كان : $(أب)^{٢} = ١٤٤$ ، $(بحـ)^{٢} = ٦٢٥$ وكانت : $ب \in \overline{أحـ}$ «٣٧ سم»

فأوجد طول $\overline{أحـ}$

٣ مربع مساحته ٠,٤٩ سم^{٢} أوجد محيطه. «٢,٨ سم»

٤ مساحة مربع تساوى مساحة مثلث طول قاعدته ٩ سم وارتفاعه ٨ سم

أوجد طول ضلع المربع. «٦ سم»

٥ دائرة مساحتها ١٥٤ سم^{٢} احسب طول نصف قطرها $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «٧ سم»

٦ دائرة مساحتها ٦١٦ سم^{٢} احسب محيطها $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «٨٨ سم»

٧ إذا كانت $\frac{٣}{٤}$ مساحة مربع تساوى $١\frac{١١}{٦٤}$ م^{٢} فاحسب طول ضلعه. «$١\frac{١}{٤}$ متر»

٨ إذا كان طول مستطيل يساوى ضعف عرضه وكانت مساحة المستطيل

تساوى ٢٤,٥ سم^{٢} احسب كلاً من الطول والعرض. «٣,٥ سم ، ٧ سم»

للمتفوقين

١١ إذا كان : أ ، ب هما الجذران التربيعيان للعدد حـ حيث حـ $\neq$ ٠ . أكمل ما يأتى :

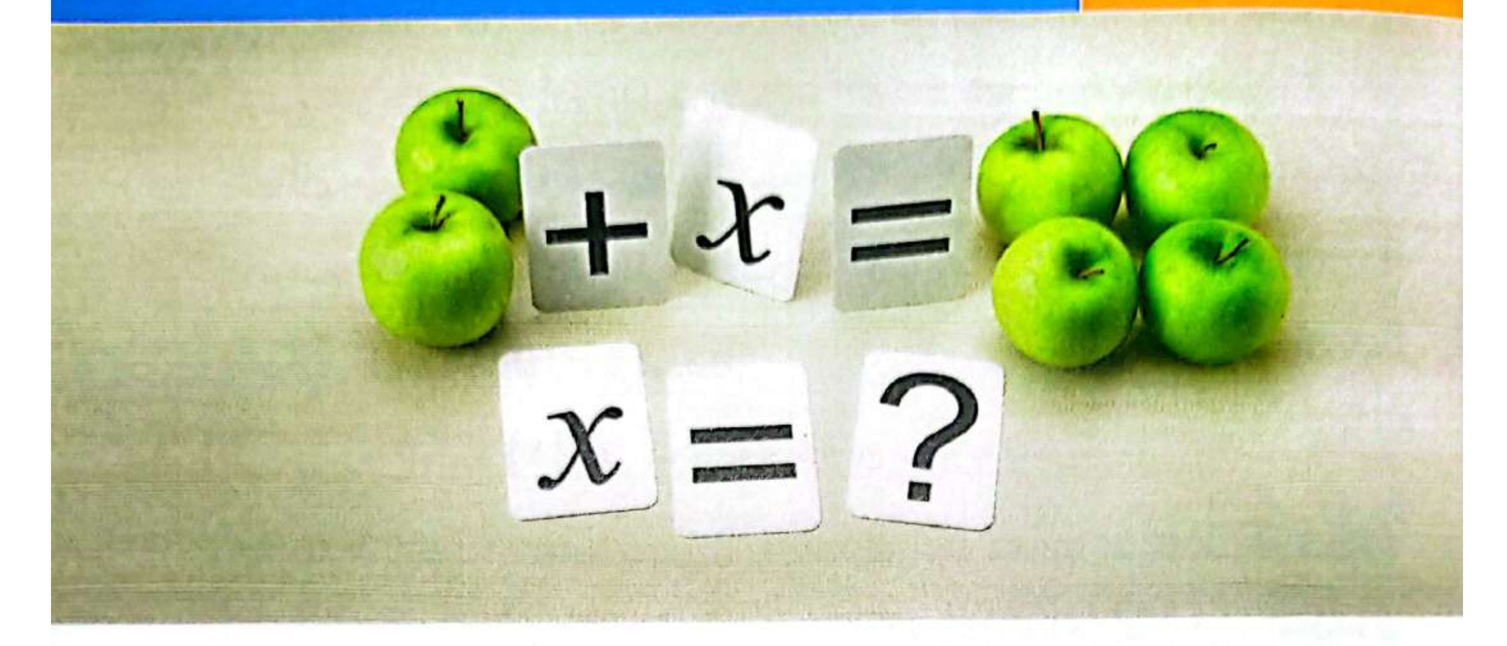
١ أ + ب = ...

٢ $\frac{أ}{ب}$ = ...

٣ أ ب + حـ = ...

١٢ إذا كان : $\frac{م}{ن}$ عددًا نسبيًا ، $\frac{م^{٢}}{ن^{٢}} = ٠,١٦$ فأوجد قيمة : $\left(\frac{م}{ن}\right)^{٣}$ «$\pm ٠,٠٦٤$»

الدرس 7 حل المعادلات فى ن



المعادلة

هى جملة رياضية تحتوى على متغير مثل س (أو أكثر مثل س ، ص) وتتضمن علاقة التساوى «=»

مثل : ٢ س = ٦ ، س + ٣ = ٥ ، ٢ س − ص = ٣ ، س٢ = ٢٥

درجة المعادلة

هى أعلى درجة حد جبرى تحتوى عليه المعادلة.

فمثلاً :
- ٥ س + ٢ = ٧ معادلة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد س
- س٢ + س − ٣ = ٠ معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد س
- ٢ س + ٣ ص = ٥ معادلة من الدرجة الأولى فى مجهولين س ، ص

مجموعة التعويض

هى المجموعة التى تنتمى إليها القيم المحتملة للمجهول فى المعادلة.

مجموعة حل المعادلة

هى المجموعة التى عناصرها هى قيم المتغير التى تحقق تساوى طرفى المعادلة وهى مجموعة جزئية من مجموعة التعويض.

فمثلاً : إذا كان : س + ٣ = ٥ ومجموعة التعويض هى {٢ ، ٣}

بوضع س = ٢ نجد أن : الطرف الأيمن = ٢ + ٣ = ٥ = الطرف الأيسر

أى أن : س = ٢ حل المعادلة.

، بوضع س = ٣ نجد أن : الطرف الأيمن = ٣ + ٣ = ٦ ≠ الطرف الأيسر

أى أن : س = ٣ ليس حلاً للمعادلة.

∴ مجموعة الحل = {٢} وهى مجموعة جزئية من مجموعة التعويض {٢ ، ٣}

- الطريقة السابقة لحل المعادلة تُسمى طريقة التعويض ونلاحظ أنها طريقة طويلة وقد تكون مستحيلة إذا كان عدد عناصر مجموعة التعويض عددًا لا نهائى كما هو الحال فى ط ، ص ، ن ولذلك فإننا سوف نستخدم طرقًا أسهل وهذا يتطلب دراسة خواص علاقة التساوى **بهدف جعل المجهول س منفردًا فى أحد طرفى المعادلة.**

خواص علاقة التساوى

• يمكن إضافة أى عدد نسبى إلى طرفى المعادلة. فمثلاً : إذا كان : س − ١ = ٥ فإن : س − ١ + ١ = ٥ + ١ أى أن : س = ٦	• يمكن طرح أى عدد نسبى من طرفى المعادلة. فمثلاً : إذا كان : س + ٣ = ٢ فإن : س + ٣ − ٣ = ٢ − ٣ أى أن : س = −١
• يمكن ضرب طرفى المعادلة فى أى عدد نسبى. فمثلاً : إذا كان : $\frac{١}{٥}$ س = ٢ فإن : $\frac{١}{٥}$ س × ٥ = ٢ × ٥ أى أن : س = ١٠	• يمكن قسمة طرفى المعادلة على أى عدد نسبى لا يساوى الصفر. فمثلاً : إذا كان : ٧ س = ١٤ فإن : $\frac{٧ س}{٧} = \frac{١٤}{٧}$ أى أن : س = ٢

وبتطبيق أى من الخواص السابقة على أى معادلة فإننا نحصل على **معادلة مكافئة** للمعادلة الأصلية **لها نفس الحل.**

وبصفة عامة : إذا كان : أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد نسبية فإن لهذه الأعداد الخواص الآتية :

١ إذا كان : أ = ب	فإن : أ + حـ = ب + حـ
٢ إذا كان : أ + حـ = ب + حـ	فإن : أ = ب
٣ إذا كان : أ = ب	فإن : أ × حـ = ب × حـ
٤ إذا كان : أ × حـ = ب × حـ ، حـ ≠ ٠	فإن : أ = ب

والأمثلة التالية توضح استخدام خواص علاقة التساوى لحل معادلة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد.

مثال ١

أوجد مجموعة حل المعادلة : س + ٥ = ٤ إذا كانت مجموعة التعويض :

١ ص ٢ ط

الحـــل

١ **إذا كانت مجموعة التعويض ص :**

∵ س + ٥ = ٤

«وبإضافة -٥ للطرفين وهو المعكوس الجمعى للعدد ٥»

∴ س + ٥ + (-٥) = ٤ + (-٥)

أى أن : س + ٠ = -١ أى أن : س = -١

يمكنك التحقق من صحة الحل بالتعويض فى المعادلة الأصلية عن قيمة س = -١

فنجد أن : الطرف الأيمن = -١ + ٥ = ٤ = الطرف الأيسر

∴ مجموعة الحل = {-١}

طريقة أخرى :

يمكنك تخيل أن ٥ تحركت من الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر وأصبحت -٥

س + ٥ = ٤ ← س = ٤ - ٥

٢ **إذا كانت مجموعة التعويض ط :**

∵ س + ٥ = ٤ «وبطرح ٥ من الطرفين»

∴ س + ٥ − ٥ = ٤ − ٥ ∴ س = ٤ − ٥

، ∵ عملية الطرح (٤ − ٥) غير ممكنة فى ط ∴ مجموعة الحل فى ط هى ∅

مثال ٢

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين فى ن :

١ ٢ س − ٥ = ١٣ ٢ $٢\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٢}$ س = ٥

الحل

١ ∵ ٢ س − ٥ = ١٣

«وبإضافة ٥ للطرفين وهى المعكوس الجمعى للعدد −٥»

∴ ٢ س − ٥ + ٥ = ١٣ + ٥

أى أن : ٢ س = ١٨

«وبقسمة الطرفين على ٢»

∴ $\frac{٢ س}{٢} = \frac{١٨}{٢}$ أى أن : س = ٩

∴ مجموعة الحل = {٩} «تحقق من صحة الناتج»

طريقة أخرى :

يمكنك تخيل أن ٢ تحركت من الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر وأصبحت مقسومًا عليها.

(٢) س = ١٨ ← س = $\frac{١٨}{٢}$

٢ ∵ $٢\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٢}$ س = ٥ «وبطرح $٢\frac{١}{٢}$ من الطرفين»

∴ $٢\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٢}$ س − $٢\frac{١}{٢}$ = ٥ − $٢\frac{١}{٢}$ ∴ − $\frac{٣}{٢}$ س = $٢\frac{١}{٢}$

∴ − $\frac{٣}{٢}$ س = $\frac{٥}{٢}$ «وبضرب الطرفين فى − $\frac{٢}{٣}$ وهو المعكوس الضربى للعدد − $\frac{٣}{٢}$»

∴ − $\frac{٣}{٢}$ س × $\left(-\frac{٢}{٣}\right)$ = $\frac{٥}{٢}$ × $\left(-\frac{٢}{٣}\right)$ ∴ س = − $\frac{٥}{٣}$

∴ مجموعة الحل = {− $\frac{٥}{٣}$} «تحقق من صحة الناتج»

مثال ٣

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

١ ٢ (س + ٣) = ٤ حيث س ∋ ص   ٢ ٥ (س + ٢) − ١ = ١٩ حيث س ∋ ن

الحل

١ ∵ ٢ (س + ٣) = ٤   «بقسمة الطرفين على ٢»

∴ $\frac{٢ (س + ٣)}{٢} = \frac{٤}{٢}$ ∴ س + ٣ = ٢   «بإضافة −٣ للطرفين»

∴ س + ٣ − ٣ = ٢ − ٣   ∴ س = −١   ∴ مجموعة الحل = {−١}

٢ ∵ ٥ (س + ٢) − ١ = ١٩

«باستخدام خاصية التوزيع»

∴ ٥ س + ١٠ − ١ = ١٩

∴ ٥ س + ٩ = ١٩   «بإضافة −٩ للطرفين»

∴ ٥ س + ٩ − ٩ = ١٩ − ٩

∴ ٥ س = ١٠   «بقسمة الطرفين على ٥»

∴ $\frac{٥ س}{٥} = \frac{١٠}{٥}$ ∴ س = ٢   ∴ مجموعة الحل = {٢}

> **لاحظ أن :**
> المعادلات :
> ٥ (س + ٢) − ١ = ١٩
> ، ٥ س + ٩ = ١٩
> ، ٥ س = ١٠
> كلها معادلات متكافئة

مثال ٤

أوجد في ن مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

١ ٣ س + ٤ = ٢ (س + ١)   ٢ ٢ (س + ٣) − (س − ٢) = ٤ (س − ١) + ٣

الحل

لاحظ أن المجهول س موجود في الطرفين فنعمل على تجميعه في طرف واحد وليكن الأيمن :

١ ∵ ٣ س + ٤ = ٢ (س + ١) «باستخدام خاصية التوزيع»

∴ ٣ س + ٤ = ٢ س + ٢

«بطرح ٢ س من الطرفين»

∴ ٣ س − ٢ س + ٤

= ٢ س − ٢ س + ٢

∴ س + ٤ = ٢ «بطرح ٤ من الطرفين»

∴ س + ٤ − ٤ = ٢ − ٤ ∴ س = −٢ ∴ مجموعة الحل = {−٢}

طريقة أخرى :

٣ س + ٤ = ٢ س + ٢ ← ٣ س − ٢ س = ٢ − ٤

(−٤ ، − ٢ س)

أى أن : س = −٢

٢ ∵ ٢ (س + ٣) − (س − ٢) = ٤ (س − ١) + ٣ «باستخدام خاصية التوزيع»

∴ ٢ س + ٦ − س + ٢ = ٤ س − ٤ + ٣

∴ س + ٨ = ٤ س − ١ «بطرح س من الطرفين»

∴ س − س + ٨ = ٤ س − س − ١

∴ ٨ = ٣ س − ١

«بإضافة ١ للطرفين»

∴ ٨ + ١ = ٣ س − ١ + ١

∴ ٩ = ٣ س

«بقسمة الطرفين على ٣»

∴ $\frac{٩}{٣} = \frac{٣ س}{٣}$ ∴ ٣ = س

∴ مجموعة الحل = {٣}

طريقة أخرى :

س + ٨ = ٤ س − ١ ← ٨ + ١ = ٤ س − س

(+ ١ ، − س)

أى أن : ٩ = ٣ س

حاول بنفسك ١

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

١ س − ٥ = ٢ حيث س ∈ ط

٢ ٢ س + ١١ = ٣ حيث س ∈ ص

٣ ٢ س − ٣ = ٥ س + ٦ حيث س ∈ ن

استخدام المعادلات فى حل المسائل اللفظية

لحل المسائل اللفظية فى الجبر نقوم بترجمة الجمل اللفظية إلى رموز ومقادير جبرية.

والجدول التالى يوضح بعض الأمثلة لذلك.

الجملة اللفظية	التعبير الجبرى
• عددان مجموعهما ٩	س ، ٩ – س
• عددان الفرق بينهما ٤	س ، س – ٤ أو (س ، س + ٤)
• عددان حاصل ضربهما ١٠	س ، $\frac{١٠}{س}$
• عددان أحدهما ضعف الآخر	س ، ٢ س أو (س ، $\frac{١}{٢}$ س)
• عددان أحدهما ثلث الآخر	س ، $\frac{١}{٣}$ س أو (س ، ٣ س)
• ثلاثة أمثال عدد مطروحًا منه ٨	٣ س – ٨
• عددان أحدهما يزيد عن ضعف الآخر بمقدار ٥	س ، ٢ س + ٥
• ثلاثة أعداد صحيحة متتالية	س ، س + ١ ، س + ٢
• ثلاثة أعداد زوجية متتالية	س ، س + ٢ ، س + ٤
• ثلاثة أعداد فردية متتالية	س ، س + ٢ ، س + ٤

مثال ٥

عددان طبيعيان أحدهما ثلاثة أمثال الآخر فإذا كان مجموعهما ١٦ فأوجد العددين.

الحـــل

• نرمز لأحد العددين بأحد الرموز وليكن س

• باستخدام معطيات المسألة نكون معادلة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد.

∵ العدد الآخر ثلاثة أمثال العدد س ∴ العدد الآخر = ٣ س

، ∵ مجموع العددين = ١٦ ∴ المعادلة هى : س + ٣ س = ١٦

• نحل المعادلة التى حصلنا عليها لإيجاد قيمة المجهول.

∵ س + ٣ س = ١٦ ∴ ٤ س = ١٦ وبالقسمة على ٤

∴ س = ٤ أى أن : أحد العددين = ٤ ، العدد الآخر = ٣ × ٤ = ١٢

• نتأكد من صحة الحل باستخدام المسألة نفسها وليس باستخدام المعادلة.

∵ ١٢ ثلاثة أمثال ٤ ، ١٢ + ٤ = ١٦ ∴ الحل صحيح.

مثال ٦

ثلاثة أعداد طبيعية فردية متتالية مجموعها ٢٧ ، أوجد هذه الأعداد.

الحـــل

نفرض أن العدد الفردى الأصغر = س

، ∵ كل عدد فردى يزيد عن العدد الفردى السابق له بمقدار ٢

∴ العدد الفردى التالى = س + ٢ ، العدد الفردى الثالث = س + ٤

، ∵ مجموع الأعداد = ٢٧ ∴ (س) + (س + ٢) + (س + ٤) = ٢٧

∴ ٣ س + ٦ = ٢٧ ∴ ٣ س = ٢٧ − ٦ ∴ ٣ س = ٢١

∴ س = $\frac{٢١}{٣}$ ∴ س = ٧ أى أن : الأعداد هى : ٧ ، ٩ ، ١١

التحقق من صحة الحل :

∵ الأعداد : ٧ ، ٩ ، ١١ طبيعية فردية متتالية ، ٧ + ٩ + ١١ = ٢٧ ∴ الحل صحيح.

تذكر أن

- محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض)
- محيط المربع = طول الضلع × ٤
- محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه
- مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × الارتفاع
- مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

مثال ٧

مستطيل طوله ضعف عرضه ومحيطه يساوى ١٨ سم أوجد بعدى المستطيل.

الحـــل

نفرض أن عرض المستطيل = س سم ∴ طوله = ٢ س سم

، ∵ محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض)

∴ ١٨ = ٢ (٢ س + س) ∴ ١٨ = ٢ × ٣ س

∴ ١٨ = ٦ س ∴ س = ٣

أى أن : عرض المستطيل = ٣ سم ، طول المستطيل = ٦ سم

التحقق من صحة الحل :

∵ طول المستطيل ٦ سم يساوى ضعف عرض المستطيل ٣ سم

، محيط المستطيل = ٢ (٦ + ٣) = ٢ × ٩ = ١٨ سم

∴ الحل صحيح.

مثال ٨

في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = (٤ س − ١٠)°

، ق (∠ ب) = (٣ س + ٢٠)° ، ق (∠ حـ) = (س + ١٠)°

أوجد قياسات الزوايا الثلاث.

الحل

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ (٤ س − ١٠) + (٣ س + ٢٠) + (س + ١٠) = ١٨٠

∴ ٨ س + ٢٠ = ١٨٠

∴ ٨ س = ١٨٠ − ٢٠ ∴ ٨ س = ١٦٠

∴ س = $\frac{١٦٠}{٨}$ ∴ س = ٢٠

∴ ق (∠ أ) = (٤ × ٢٠) − ١٠ = ٨٠ − ١٠ = ٧٠°

، ق (∠ ب) = (٣ × ٢٠) + ٢٠ = ٦٠ + ٢٠ = ٨٠°

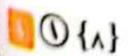
، ق (∠ حـ) = ٢٠ + ١٠ = ٣٠°

التحقق من صحة الحل :

∵ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) + ق (∠ حـ) = ٧٠° + ٨٠° + ٣٠° = ١٨٠° ∴ الحل صحيح.

حاول بنفسك ٢

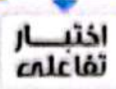
عددان صحيحان الفرق بينهما ٤ ومجموعهما ١٤ ، فما هما العددان ؟



تمارين 7

على حل المعادلات فى ن





• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات — أسئلة كتاب الوزارة

1 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

1. س − ٧ = ٣ حيث س ∈ ط
2. س + ١٧ = ١٣ حيث س ∈ ط
3. ٥ س = ٢٠ حيث س ∈ ن
4. $\frac{٢}{٥}$ س = $\frac{١}{٥}$ حيث س ∈ ن
5. −٤ + ص = ١٣ حيث ص ∈ ط
6. أ − (−٣) = ١ حيث أ ∈ ص
7. س − ٧ = صفر حيث س ∈ ص
8. ص − (−٥) = −٣ حيث ص ∈ ن
9. س − ٦$\frac{١}{٤}$ = ١٢$\frac{١}{٢}$ حيث س ∈ ن
10. ٨,٩١ + س = ١١,٠٩ حيث س ∈ ن

2 حل كلاً من المعادلات الآتية :

1. ٢ س − ١ = ٥ حيث س ∈ ن
2. ٨ س + ٤ = ١٢ حيث س ∈ ن
3. ٣ س − ١٣ = ٢٦ حيث س ∈ ط
4. ٢ س + ١٤ = ١٤ حيث س ∈ ط
5. ٨ + ٢ س = ١٤ حيث س ∈ ص
6. $\frac{٥}{٦}$ س − ٤ = ١١ حيث س ∈ ن
7. ٨ − ٢ س = −٢ حيث س ∈ ص
8. ٢ − ٥ س = صفر حيث س ∈ ن
9. ٢ س + ٣ س + ٢٥ = ٥ حيث س ∈ ص
10. ٦ س − ٢ س + ٧ = ٤ حيث س ∈ ص



٣ حل كلاً من المعادلات الآتية فى ن :

١ ٢ (س − ٣) = ٤

٢ ٣ س + ٢ (٥ س − ٣) = ٧

٣ ٧ (س − ٢) − ٣ (س + ١) = ٣

٤ 📖 ٣ (س + ٢) + ٧ (س − ١) = ١٢

٥ 📖 ٤ (س − ١) − (س + ٣) = صفر

٦ ٥ (س − ٢) + ٢ (س + ٤) = −١٦

٧ ٢ (س − ٣) + ٣ (س − ٢) − ٤ س = −٣

٨ 📖 ٣ أ + ٦ (أ + ٣) − (٨ أ − ١٦) = ٦٠

---

٤ أوجد فى ن مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ ٢ س + ٥ = س + ٩

٢ 📖 ٥ س − ٤ = ٢ س + ١١

٣ 📖 س + ٣ = ١٨ − ٣ س

٤ ٣ س + ٦ = ٣٠ − ٥ س

٥ ٤ (س + ١) = ٢ (س − ١)

٦ ٣ (س − ٢) = ٥ س − ١٠

٧ 📖 أ + ٥ أ − ٢ = ٢ (٣ − أ)

٨ 📖 ٣ (٢ س − ٨) − (٢ س + ٢) = س − ٣

٩ (س + ١) / ٣ = (س − ١) / ٤

١٠ ٥ / (٤ + ٤ س) = ٣ / (١ − ٢ س)

---

٥ أكمل ما يأتى :

١ إذا كان : س + ٥ = ٧ فإن : س = ...

٢ 📖 إذا كان : ٣ ص = ٦ فإن قيمة : ٦ ص = ...

٣ إذا كان : ٢ س = ٥ فإن قيمة : ٤ س = ...

٤ 📖 إذا كان : س + ٩ = ١١ فإن قيمة : ٧ س = ...

٥ 📖 إذا كان : ٢ أ + ٣ = ١٥ فإن قيمة : ١/٢ أ = ...

٦ 📖 إذا كان : ك − ١ ١/٤ = ٥ ١/٢ فإن قيمة : ٤ ك − ١٨ = ...

٧ إذا كان : $\frac{س}{٤} = \frac{٢}{٣}$ فإن قيمة : $\frac{س}{٢} =$ ....

٨ إذا كان عمر رجل الآن س سنة فإن عمره منذ ٥ سنوات هو ....

٩ إذا كان عمر رجل الآن س سنة فإن عمره بعد ٤ سنوات هو ....

١٠ إذا كان عمر رجل بعد ٥ سنوات هو س سنة فإن عمره الآن هو ....

١١ إذا كان عمر يوسف بعد ٤ سنوات هو س سنة فإن عمره منذ سنتين هو ....

١٢ مستطيل طوله ثلاثة أمثال عرضه فإذا كان طوله س سم فإن عرضه = ... سم

١٣ المستطيل الذى عرضه = س سم وطوله ضعف عرضه يكون محيطه = ... سم

١٤ عددان صحيحان مجموعهما ٥ فإذا كان أحدهما س فإن الآخر هو ....

١٥ عددان صحيحان الفرق بينهما ٢ فإذا كان أصغرهما س فإن العدد الأكبر ....

---

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : ٢ س = ٢ فإن : ٣ س − ١ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

٢ إذا كانت : ٢ س = صفر فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) صفر

٣ إذا كان : ٢ أ ب = ١٠ فإن : ٣ أ ب = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١٥ (د) ٣٠

٤ إذا كان : ٠,٢ + أ = ٥ فإن : $\frac{أ}{٤} =$ ....

(أ) ٤,٨ (ب) ١,٣ (جـ) ١,٢ (د) ١٩,٢

٥ إذا كان : ٥ س + ٨ س + ٢ س + ٤ س = ١١٤

فإن : ٥ س + ٣ = ...

(أ) ٣٣ (ب) ٣٥ (جـ) ٤٧ (د) ٨ س

٦ مجموعة حل المعادلة : $\frac{٢أ}{٣} = ٨ + ٤أ$ فى ن هى ....

(أ) {-٤ ، ٢}　(ب) {٤ ، ٢}　(جـ) {$-\frac{١}{٣}٣$}　(د) {صفر}

٧ أى من المعادلات الآتية تكافئ المعادلة : س + ٣ = ١٢ ؟

(أ) س − ٣ = −١٢　(ب) س + (−٣) = ١٢

(جـ) س − (−٣) = ١٢　(د) س − (−٣) = −١٢

٨ أى من المعادلات الآتية تكافئ المعادلة : س − ١٢ = ١٥ ؟

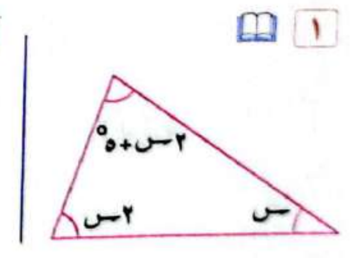
(أ) س + ١٢ = −١٥　(ب) $\frac{١}{٣}$ س − ٤ = ٥

(جـ) س − ٤ = −٥　(د) س + ٤ = ٥

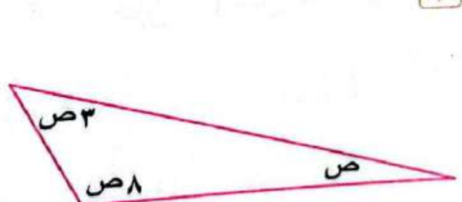
تطبيقات هندسية

٧ أوجد قياسات زوايا كل مثلث من المثلثات الآتية :

١



٢



٣

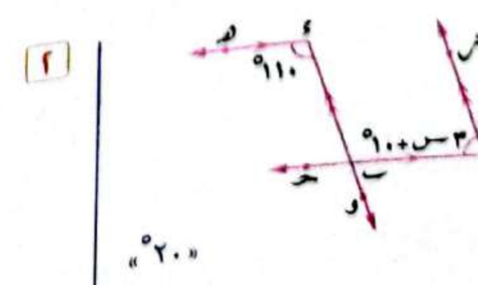
٨ فى الشكل المقابل :

إذا كانت : حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$

فأوجد : ق (∠ء حـ هـ)　«٨٠°»

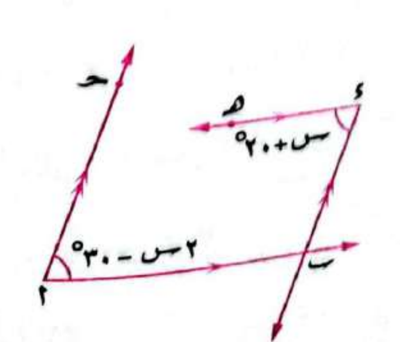
٩ فى كل من الشكلين الآتيين أوجد قيمة س :

١



«٢٠°»

٢



«٥٠°»

١٠ مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٤ أمتار ، فإذا كان محيطه يساوى ٦٨ مترًا ، فما بعداه ؟

«١٩ م ، ١٥ م»

١١ مستطيل طوله ينقص عن ضعف عرضه بمقدار ٤ سم فإذا كان محيطه مساويًا لمحيط مربع طول ضلعه ٧ سم أوجد بعدى المستطيل.

«٦ سم ، ٨ سم»

١٢ مستطيل طوله ضعف عرضه فإذا نقص الطول بمقدار ٥ سم وزاد العرض بمقدار ٦ سم لأصبح المستطيل مربعًا أوجد مساحة هذا المستطيل.

«٢٤٢ سم^2»

تطبيقات حياتية

١٣ عددان صحيحان أصغرهما ٢ س وأكبرهما ٧ س فإذا كان الفرق بينهما ٢٥ أوجد العددين.

«١٠ ، ٣٥»

١٤ عددان طبيعيان أحدهما ضعف الآخر ومجموعهما ١٠٨ ما العددان ؟ «٣٦ ، ٧٢»

١٥ عددان طبيعيان الفرق بينهما ٥ ومجموعهما ٢١ فما هما العددان ؟ «١٣ ، ٨»

١٦ أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى ثلاثة أمثاله كان الناتج ٣٢ «٨»

١٧ أوجد العدد الذى إذا طُرح من ثلاثة أمثاله ٩ كان الناتج ٦ «٥»

١٨ ثلاثة أعداد طبيعية متتالية مجموعها ٢١٣ فما هى هذه الأعداد ؟ «٧٠ ، ٧١ ، ٧٢»

١٩ أوجد ثلاثة أعداد زوجية متتالية مجموعها ٩٦٦ «٣٢٠ ، ٣٢٢ ، ٣٢٤»

٢٠ أوجد ثلاثة أعداد فردية متتالية مجموعها ٣٥٧ «١١٧ ، ١١٩ ، ١٢١»

٢١ رجل عمره الآن ثلاثة أمثال عمر ابنه وبعد سنتين يصبح مجموع عمريهما ٥٢ سنة فما عمر كل منهما الآن ؟ «١٢ سنة ، ٣٦ سنة»

٢٢ ثلاثة أشقاء أمجد وباسم وأيمن مجموع أعمارهم ٨٩ سنة فإذا وُلد أمجد قبل باسم بسنتين ووُلد باسم قبل أيمن بست سنوات. ما عمر كل منهم الآن ؟ «٢٥ سنة ، ٣١ سنة ، ٣٣ سنة»

٢٣ إذا كان ثمن متر الصوف يزيد جنيهين عن ثمن متر الحرير ، وكان ثمن ٣ أمتار من الصوف و ٤ أمتار من الحرير يساوى ٦٧١ جنيهًا. ما ثمن كل متر من الصوف ومن الحرير ؟

«٩٧ جنيهًا ، ٩٥ جنيهًا»



٢٤ أوجد فى ن مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

١ $٥ - \frac{٦}{س} = -١$ ٢ $-\frac{٣}{٥} + \frac{س}{١٠} = -\frac{١}{٥} - \frac{س}{٥}$

٢٥ أوجد فى ن مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

١ $(س + ٣)^٢ - (س - ٢)^٢ = ١٥$

٢ $(٢ س + ٣) (٢ س - ١) - (٢ س - ١)^٢ = ١٤$

٢٦ إذا كانت مجموعة حل المعادلة : ١٢ س + ٣ = ٣٩ فى ن تساوى مجموعة حل المعادلة : أ س - ١٢ = أ فى ن فأوجد قيمة أ

«٦»

٢٧ إذا كان : أ + ١ حل للمعادلة : $(س + أ) (س - أ) = س^٢ - أ س + ٣$ فى ن فأوجد قيمة أ

«٣»

٢٨ ثلاثة أشقاء ولدوا فى السنوات ١٩٨٠ ، ١٩٨٤ ، ١٩٨٦ المطلوب معرفة تاريخ السنة التى أصبح مجموع أعمارهم فيها ٤١ عامًا.

«١٩٩٧»

الدرس 8

حل المتباينات فى ن



- سبق لنا دراسة بعض المفاهيم مثل مجموعة التعويض ، مجموعة الحل فى المعادلات وهى نفسها بالنسبة للمتباينات.
- مجموعة حل المتباينة هى المجموعة التى عناصرها تحقق المتباينة وهى مجموعة جزئية من مجموعة التعويض.
- وقبل دراسة كيفية حل المتباينات فى ن ندرس خواص التباين.

خواص التباين

نعلم أن : $٦ > -٩$ متباينة صحيحة.

ولكن هل سيؤدى إجراء العمليات الآتية عليها إلى متباينات صحيحة ؟!!

① أضف ٢ إلى طرفى المتباينة :

∴ $٦ + ٢ > -٩ + ٢$ ⟵ $٨ > -٧$ وهى متباينة صحيحة.

وبصفة عامة : يمكن إضافة عدد ثابت إلى طرفى المتباينة بدون تأثير على علاقة التباين.

٢ اطرح ٧ من طرفى المتباينة :

∴ ٦ − ٧ > −٩ − ٧ ⟵ −١ > −١٦ وهى متباينة صحيحة.

وبصفة عامة : يمكن طرح عدد ثابت من طرفى المتباينة بدون تأثير على علاقة التباين.

٣ اضرب طرفى المتباينة فى ٥ (عدد موجب) :

∴ ٦ × ٥ > −٩ × ٥ ⟵ ٣٠ > −٤٥ وهى متباينة صحيحة.

وبصفة عامة : يمكن ضرب طرفى المتباينة فى عدد موجب بدون تأثير على علاقة التباين

٤ اقسم طرفى المتباينة على ٣ (عدد موجب) :

∴ $\frac{٦}{٣} > \frac{-٩}{٣}$ ⟵ ٢ > −٣ وهى متباينة صحيحة.

وبصفة عامة : يمكن قسمة طرفى المتباينة على عدد موجب بدون تأثير على علاقة التباين

٥ اضرب طرفى المتباينة فى −١ (عدد سالب) :

∴ ٦ × (−١) > −٩ × (−١) ⟵ −٦ > ٩ وهى متباينة غير صحيحة حيث −٦ < ٩

وبصفة عامة : عند ضرب طرفى المتباينة فى عدد سالب يتغير اتجاه علاقة التباين.

٦ اقسم طرفى المتباينة على −٣ (عدد سالب) :

∴ $\frac{٦}{-٣} > \frac{-٩}{-٣}$ ⟵ −٢ > ٣ وهى متباينة غير صحيحة حيث −٢ < ٣

وبصفة عامة : عند قسمة طرفى المتباينة على عدد سالب يتغير اتجاه علاقة التباين.

يمكن تلخيص خواص التباين السابقة كما يلى : بفرض أن : أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد نسبية فإنه :

١ إذا كان : أ < ب	فإن : أ + حـ < ب + حـ
٢ إذا كان : أ < ب	فإن : أ − حـ < ب − حـ
٣ إذا كان : أ < ب ، حـ عدد موجب	فإن : أحـ < ب حـ
٤ إذا كان : أ < ب ، حـ عدد موجب	فإن : أ/حـ > ب/حـ
٥ إذا كان : أ < ب ، حـ عدد سالب	فإن : أحـ > ب حـ
٦ إذا كان : أ < ب ، حـ عدد سالب	فإن : أ/حـ < ب/حـ

ملاحظة

إذا كان : أ ، ب عددين نسبيين غير صفريين لهما نفس الإشارة وكان : أ > ب فإن : ١/أ < ١/ب

مثال ١

أوجد مجموعة الحل للمتباينة س + ٢ < ٥ فى كل من الحالتين الآتيتين :

١ إذا كانت : س ∈ ص **٢** إذا كانت : س ∈ ط

ثم مثل مجموعة الحل على خط الأعداد فى كل حالة.

الحل

∵ س + ٢ < ٥ «بطرح ٢ من الطرفين» ∴ س + ٢ − ٢ < ٥ − ٢

أى أن : س < ٣

١ عندما س ∈ ص تكون مجموعة الحل هى كل الأعداد الصحيحة الأصغر من ٣

أى أن : مجموعة الحل = {٢ ، ١ ، ٠ ، −١ ، ...}

٥ ٤ ٣ ٢ ١ صفر −١ −٢

٢ عندما س ∈ ط تكون مجموعة الحل هى كل الأعداد الطبيعية الأصغر من ٣

أى أن : مجموعة الحل = {٢ ، ١ ، ٠}

صفر ١ ٢ ٣ ٤ ٥

لاحظ من المثال السابق أن :

مجموعة الحل فى ص تختلف عن مجموعة الحل فى ط

وذلك **لأن** : مجموعة حل المتباينة تعتمد على مجموعة التعويض

مثال ٢

أوجد مجموعة حل المتباينة : ٢ س − ٥ > ٥ فى كل من الحالتين الآتيتين :

١ إذا كانت : س ∈ ن

٢ إذا كانت : س ∈ ص

الحــل

∵ ٢ س − ٥ > ٥ «بإضافة ٥ للطرفين»

∴ ٢ س − ٥ + ٥ > ٥ + ٥

∴ ٢ س > ١٠ «بضرب الطرفين فى $\frac{١}{٢}$ »

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٢ س > $\frac{١}{٢}$ × ١٠ أى أن : س > ٥

١ عندما س ∈ ن تكون مجموعة الحل هى كل الأعداد النسبية الأكبر من ٥ ونكتبها بطريقة الصفة المميزة لصعوبة سرد عناصرها.

أى أن : مجموعة الحل = {س : س ∈ ن ، س > ٥}

٢ عندما س ∈ ص تكون مجموعة الحل هى كل الأعداد الصحيحة الأكبر من ٥

أى أن : مجموعة الحل = {٦ ، ٧ ، ٨ ، ...}

مثال ٣

أوجد في ن مجموعة الحل لكل من المتباينتين الآتيتين :

١ $٤ - ٢ س \geq ٢$ ٢ $٧ (س - ١) > ٩ س - ٦$

الحـــل

١ ∵ $٤ - ٢ س \geq ٢$ «بإضافة -٤ للطرفين»

∴ $-٤ + ٤ - ٢ س \geq -٤ + ٢$

∴ $-٢ س \geq -٢$ «بقسمة الطرفين على -٢»

∴ $\frac{-٢ س}{-٢} \leq \frac{-٢}{-٢}$ «لاحظ تغير اتجاه علاقة التباين»

∴ $س \leq ١$ أى أن : مجموعة الحل = $\{س : س \in ن ، س \leq ١\}$

٢ ∵ $٧ (س - ١) > ٩ س - ٦$

∴ $٧ س - ٧ > ٩ س - ٦$ «بطرح ٩ س من الطرفين»

∴ $٧ س - ٩ س - ٧ > ٩ س - ٩ س - ٦$

∴ $-٢ س - ٧ > - ٦$ «بإضافة ٧ للطرفين»

∴ $-٢ س - ٧ + ٧ > - ٦ + ٧$

∴ $-٢ س > ١$ «بالقسمة على -٢»

∴ $\frac{-٢ س}{-٢} < \frac{١}{-٢}$ «لاحظ تغير اتجاه علاقة التباين»

∴ $س < -\frac{١}{٢}$ أى أن : مجموعة الحل = $\{س : س \in ن ، س < -\frac{١}{٢}\}$

مثال ٤

أوجد فى ص مجموعة حل المتباينة : -١١ ≤ ٣س - ٥ < ٤ ومثلها على خط الأعداد.

الحل

∵ -١١ ≤ ٣س - ٥ < ٤ «بإضافة ٥ للأطراف الثلاثة»

∴ -١١ + ٥ ≤ ٣س - ٥ + ٥ < ٤ + ٥

∴ -٦ ≤ ٣س < ٩ «بقسمة الأطراف الثلاثة على ٣»

∴ $\frac{-٦}{٣} \le \frac{٣س}{٣} < \frac{٩}{٣}$ ∴ -٢ ≤ س < ٣

أى أن : مجموعة الحل = {-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢}

-٤ -٣ -٢ -١ صفر ١ ٢ ٣ ٤

حاول بنفسك

أوجد مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين :

١) ٢س - ٣ ≥ ٥ حيث س ∈ ن

٢) ٥س - ١٠ < ٢س - ١ حيث س ∈ ط

تمارين 8

على حل المتباينات فى ن



اختبار تفاعلى

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ ما العدد الذى يمكن إضافته إلى طرفى كل متباينة لتحصل على س فى طرف واحد منها ؟

١ س + ٥ > ٩	٢ س − ٤ < ٦
٣ س − ٧ < ٣	٤ س + ٩ > ١٢
٥ س − ١,٥ ≤ ٣,٢	٦ ٤,٨ ≤ س + ٠,٦
٧ ١ ١/٢ > س − ٢ ١/٢	٨ س + ١/٣ > − ١/٦

٢ أوجد مجموعة حل المتباينة س + ٣ ≤ ٦ في كل من الحالتين الآتيتين :

١ س ∈ ص	٢ س ∈ ط

ومثّل الحل على خط الأعداد فى الحالتين.

٣ أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية فى ن :

١ س + ٢ > ٥	٢ س + ٤ > ١	٣ ص − ٥ > ٧
٤ ١٩ < ص + ١٤	٥ −١ ≥ س − ٣	٦ − ٥ ١/٢ < أ + ١ ١/٤
٧ −٢ س < ١٢	٨ ٢/٣ س ≥ ١	٩ − ١/٤ س ≤ ١/٤

٤ حل كلاً من المتباينات الآتية فى ن :

١ ٣ س − ٢ < ١	٢ ٢ س + ٣ < ٩
٣ ٤ س + ٢ ≥ −١٠	٤ ٣ س − ٢ ≥ ٥
٥ ٣ س − ٩ < ٠	٦ ١ + ٢ س ≤ −٣
٧ ٩ − ٦ س < ١٥	٨ ٢ − ٣ س ≤ ٤
٩ (٣ س − ٢)/٥ ≥ ١/٢	١٠ ٨ س − ٣ س + ١ ≤ ٢٩
١١ ٤ ن − ٢ (ن − ١) ≥ صفر	١٢ −٣ م + ٦ (م − ٤) > ٩

٥ حل كلاً من المتباينات الآتية في ن :

١ ٦ حـ + ١ ≥ ٥ حـ - ٣

٢ ٦ س + ٢ ≥ ١٤ + ٥ س

٣ ٣ س - ٢ > ٥ س - ٨

٤ ٨ - ٢ س ≥ ٥ س

٥ ٥ س + ١ ≥ ٢ (س + ٢)

٦ ٣ (س + ٢) > - س + ٤

٧ ٣ (س + ٢) ≥ - ٢ (س + ١)

٨ ٢ - ٣ (س - ٥) ≥ س + ٧

٩ ٣ (٧ ص - ١/٣) ≥ ٢٠ ص - ١

١٠ س/٢ + ٣ ≥ ٢ س + ١

٦ أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

١ ٩ ≥ ٤ س + ١ ≥ ١٧ ، س ∈ ص

٢ ٩ ≥ ٣ س + ٢ > ١٢ ، س ∈ ن

٣ ٩ > س + ٦ > ٢ ، س ∈ ط

٧ أكمل :

١ إذا كان : س > ص فإن : س + ع .... ص + ع

٢ إذا كان : س < ص فإن : س + ع .... ص + ع

٣ إذا كان : س < ص ، ص < ع فإن : س < ....

٤ إذا كان : ع > ص ، ص > س فإن : ع > ....

٥ إذا كان : أ - ٣ > صفر فإن : .... > ....

٦ إذا كان : أ + ٥ < صفر فإن : .... < ....

٧ إذا كان : ب < صفر فإن : ب + ٣ .... ٣

٨ إذا كان : س > ص ، ع > صفر فإن : س ع .... ص ع

٩ إذا كان : س < ص ، ع < صفر فإن : س ع .... ص ع

٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : – س < ٥ فإن : ....

(أ) س < ٥ (ب) س > –٥ (جـ) س > ٥ (د) س < –٥

٢ إذا كانت : س ∈ ط فإن مجموعة حل المتباينة : – س < ٣ هى ....

(أ) {٤ ، ٥ ، ...} (ب) {–٤ ، –٥ ، ...}

(جـ) {–٣} (د) ∅

٣ $\frac{\text{س}}{٣}$ < ٤ تكافئ ....

(أ) س < $\frac{٤}{٣}$ (ب) س > $\frac{٤}{٣}$ (جـ) س > ١٢ (د) س < ١٢

٤ إذا كانت : س ∈ ص فإن مجموعة حل المتباينة : ٢٠ < ٥ س < ٢٥ هى ....

(أ) {٤} (ب) {٥} (جـ) {٤ ، ٥} (د) ∅

٥ مجموعة حل المتباينة : –٢ س < صفر فى ن هى ....

(أ) ∅ (ب) ن+ (جـ) ن− (د) ص+

٦ عدد حلول المتباينة : $\frac{١}{٥}$ < س < $\frac{٢}{٥}$ حيث س ∈ ن هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

٧ إذا كانت : س > ص فإن : $\frac{١}{\text{س}}$ .... $\frac{١}{\text{ص}}$ حيث س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ≤

٨ العدد ٢ ينتمى إلى مجموعة حل المتباينة .... حيث س عدد صحيح.

(أ) س < ٢ (ب) س > ٢ (جـ) – س > –٣ (د) – س > ٣

٩ إذا كانت : س > ٥ فإن : – س ....

(أ) > –٩ (ب) ≤ –٥ (جـ) > –٥ (د) < –٥

---

٩ وضح بالأمثلة أنه إذا كان : أ > ب ، جـ > ء فإنه غير صحيح دائمًا أن يكون

أ – جـ > ب – ء

١٠ إذا كانت $\text{س} > \text{ص}$ فضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة غير الصحيحة مع إعطاء أمثلة للمتباينات غير الصحيحة :

١ $\text{ص} < \text{س}$	( )	٢ $\text{س} > \text{صفر}$	( )
٣ $\text{ص}^{2} \leq \text{صفر}$	( )	٤ $\text{ص}^{2} > \text{ص}$	( )
٥ $\text{س ص} > \text{صفر}$	( )	٦ $\text{س} + \text{ص} > \text{ص}$	( )
٧ $\text{ص}^{2} > \text{س}$	( )	٨ $\text{ص}^{2} > \text{س ص}$	( )
٩ $\text{س ص} < \text{س}^{2}$	( )	١٠ $\text{س}^{3} < \text{ص}^{2}$	( )

تطبيق حياتى

١١ أراد هانى شراء حذاء واحد وبعض القمصان

فإذا كان هانى يمتلك ٢٠٠ جنيه ،

وكان ثمن الحذاء ٧٠ جنيهًا

وثمن القميص الواحد ٤٠ جنيهًا

فما هو أكبر عدد من القمصان

يستطيع هانى أن يشتريه ؟



١٢ إذا كانت مجموعة حل المتباينة : $\text{أ} \leq 3\text{س} - 5 \leq \text{ب}$ فى ن هى :

$\{\text{س} : \text{س} \in \text{ن} ، 2 \leq \text{س} \leq 5\}$ فأوجد قيمتى أ ، ب العددية. «١ ، ١٠»

١٣ إذا كان : $-4 \leq \text{س} \leq 5$ ، $2 \leq \text{ص} \leq 7$ حيث $\text{س} \in \text{ن}$ ، $\text{ص} \in \text{ن}$ فأوجد :

١ أكبر قيمة ممكنة للمقدار : $\text{س} + \text{ص}$

٢ أكبر قيمة ممكنة للمقدار : $\text{ص} - \text{س}$

٣ أصغر قيمة ممكنة للمقدار : س ص

٤ أصغر قيمة ممكنة للمقدار : $\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}$

مشروع بحثى

على الوحدة الأولى



أهداف المشروع

- التعرف على الصورة القياسية للعدد النسبى.
- كتابة عدد نسبى فى صورته القياسية.
- الربط بين الرياضيات والدراسات الاجتماعية.

المطلوب

« تعتبر التضاريس أحد العوامل المؤثرة فى درجة الحرارة على سطح الأرض، فتغطى الثلوج بعض القمم الجبلية المرتفعة »

فى ضوء ذلك قُم بإعداد مشروع بحثى يتضمن ما يلى :

(١) اكتب نبذة مختصرة عن العوامل المؤثرة فى درجة الحرارة على سطح الكرة الأرضية.

(٢) اذكر كيف يؤثر الارتفاع عن سطح الأرض فى درجة الحرارة، وإذا قيست درجة الحرارة عند سفح جبل فكانت ٣٠ درجة مئوية، كما قيست فوق قمته فكانت ـ٢ درجة مئوية.

فكم يكون ارتفاع هذا الجبل بالمتر مكتوبًا فى الصورة القياسية ؟

الوحدة 2 الإحصاء والاحتمال

دروس الوحدة :

الدرس 1 العينات (العينة المنتظمة - العينة العشوائية).

الدرس 2 الاحتمال (الاحتمال التجريبي - الاحتمال النظري).



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

أهداف الوحدة :

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يتعرف العينة وكيفية اختيارها.
- يصنف العينات طبقًا لطريقة اختيار عناصرها.
- يختار عينة عشوائية من مجتمع موزع توزيعًا عشوائيًا.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى اختيار عينة عشوائية.
- يجرى تجربة عشوائية ويكتب فضاء العينة.
- يتعرف مفهوم الحدث.
- يحسب الاحتمال لحدث ما.
- يتعرف الحدث المستحيل.
- يتعرف الحدث المؤكد.

بيير سيمون لابلاس

عالم رياضى وفلكى فرنسى ، وُلد فى ٢٣ مارس ١٧٤٩م .

وتوفى فى ٥ مارس ١٨٢٧م ، له العديد من المؤلفات ومن أوائل المؤلفات المنشورة له فى عام ١٧٧١م بادئًا بالمعادلات التفاضلية إلا أنه بدأ بالفعل فى التفكير فى المفاهيم الفلسفية والرياضية فى الاحتمال والإحصاء.



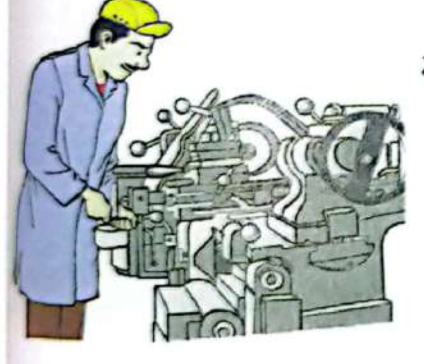
بيير سيمون لابلاس
(١٧٤٩م / ١٨٢٧م)

الدرس 1

العينـــــات



مقدمة



عند إجراء فحص لإنتاج مصنع ما للوقوف على مدى مطابقة منتجاته للمواصفات المحددة عادة لا يتم فحص جميع إنتاج هذا المصنع بل نكتفى بفحص جزء من هذا الإنتاج تحت شروط معينة بحيث يكون هذا الجزء ممثلًا لإنتاج المصنع بالكامل ، ثم نُعمم النتائج على كل الإنتاج.
هذا الجزء يُسمى «عينة».

تعريف

العينة هى جزء صغير من مجتمع كبير تشبه المجتمع وتمثله ، وتُختار بطريقة عشوائية.

ولاحظ أن : العينة المختارة يجب أن تكون ممثلة للمجتمع محل الدراسة تمثيلاً كليًا وألا تكون متحيزة لفئة معينة دون الأخرى وذلك حتى تكون نتائج الدراسة أقرب إلى الواقع ويمكن اتخاذ قرارات فى ضوئها ومن ثم يمكن تعميم هذه النتائج على المجتمع ككل.

أنواع العينات

* **تُصنف العينات طبقًا لطريقة اختيار عناصرها وفى هذا الدرس نقدم نوعين من العينات وهما :**

1 العينة المنتظمة.
2 العينة العشوائية.

١ العينة المنتظمة

هى تلك العينة التى يتم اختيار عناصرها من بين عناصر مجتمع موزع توزيعًا عشوائيًا عن طريق اتباع نظام أو نسق معين فى الاختيار.

فمثلاً :



لاختيار عينة منتظمة قوامها ١٠٪ من درجات تلاميذ مدرسة إعدادية فى اختبار مادة الرياضيات لنصف العام وذلك لدراسة مستوى تحصيلهم فإنه :

١ لا بد أولًا أن يكون تلاميذ المدرسة موزعين توزيعًا عشوائيًا فى قوائم مرقمة فلا يتم الاختيار من فصول المتفوقين مثلًا دون غيرها أو فصول معينة دون أخرى.

٢ نختار بطريقة منتظمة درجة طالب من كل ١٠ طلاب بحيث يكون العاشر فيهم فى كل مرة أى نختار درجة الطالب العاشر ، العشرين ، الثلاثين ، ...

! ملاحظة

إذا كان المجتمع محل الدراسة مقسمًا بطبعه إلى فئات أو مجموعات كالمدرسة المقسمة إلى فصول للبنين وأخرى للبنات ، فإننا نختار من كل فئة جزءًا يمثلها حتى تكون العينة المختارة ممثلة للمجتمع ككل.

٢ العينة العشوائية

هى تلك العينة التى يتم اختيار عناصرها من بين عناصر مجتمع موزع توزيعًا عشوائيًا بطريقة عشوائية غير منتظمة وفيها لابد أن يحصل كل فرد على نفس الفرصة فى الاختيار

ويمكن اختيار عناصرها بطريقتين :

- طريقة يدوية.
- باستخدام الآلة الحاسبة.

الطريقة الأولى : (طريقة يدوية) :

وتتم هذه الطريقة كما يلى :

١ يُعطى كل فرد فى مجتمع الدراسة رقمًا ثم يكتب هذا الرقم فى قصاصة ورق بحيث تكون جميع القصاصات متماثلة أى لا تمييز فيها من حيث اللون أو المقاس.



٢ تُطبق كل قصاصة بطريقة متماثلة بحيث لا يظهر الرقم نهائيًا ثم توضع فى إناء وتُخلط جيداً.

٣ يتم اختيار العينة باختيار ورقة تلو الورقة من الإناء دون النظر داخله وفى كل مرة تُقلِّب الأوراق جيدًا حتى ننتهى من اختيار العدد المطلوب للعينة.

الطريقة الثانية : (باستخدام الآلة الحاسبة العلمية) :

وتتم هذه الطريقة باستخدام خاصية الرقم العشوائى الموجود بالآلة الحاسبة العلمية مثل الموضحة بالصورة المقابلة ، ويتم ذلك بالضغط على المفاتيح التالية بالترتيب من اليمين :



فيظهر فى كل مرة رقم عشرى بين صفر ، ٠,٩٩٩ فنأخذ الأرقام بعد تجاهل العلامة العشرية وتُستبعد الأرقام الأكبر من عدد مجتمع الدراسة كما يتم استبعاد الأرقام التى تم اختيارها من قبل وتعتبر نسبة ١٠٪ نسبة مناسبة لإجراء أى استبيان.

مثال

مصنع به ٣٠٠ عامل ويريد المسئولون عن إعداد المجلة الشهرية الخاصة بهذا المصنع تطوير هذه المجلة فى ضوء معرفة آراء العاملين من خلال استبيان تم إعداده لهذا الغرض يُعطى هذا الاستبيان لعينة عشوائية ١٠٪ من إجمالى عدد العاملين بهذا المصنع.

وضح كيف يتم اختيار هذه العينة باستخدام الآلة الحاسبة.



الحـــل

∵ عدد العاملين بالمصنع = ٣٠٠ عامل

∴ عدد العينة العشوائية = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٣٠٠ = ٣٠ عاملاً

أى أننا نريد اختيار ٣٠ عاملاً لإجراء هذا الاستبيان ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية كالتالى :

١ يعطى كل عامل من العاملين بالمصنع رقمًا من ١ إلى ٣٠٠

٢ تُستخدم الآلة الحاسبة العلمية لاختيار ٣٠ رقمًا بالطريقة السابق ذكرها والأرقام العشوائية التى تظهر أكبر من ٣٠٠ يتم استبعادها.

فمثلًا : بالضغط على المفاتيح SHIFT ← Ran# ← = ← S⇔D بالترتيب :

- إذا حصلنا على الكسر العشرى ٠,٥٦ يكون رقم الشخص المختار هو ٥٦
- إذا حصلنا على الكسر العشرى ٠,٠٤٩ يكون رقم الشخص المختار هو ٤٩
- إذا حصلنا على الكسر العشرى ٠,١٣٢ يكون رقم الشخص المختار هو ١٣٢
- إذا حصلنا على الكسر العشرى ٠,٤٥٣ يتم استبعاده لأن رقم ٤٥٣ خارج نطاق الأعداد من ١ إلى ٣٠٠ وهكذا حتى نحصل على ٣٠ رقمًا

* ونفرض أن الآلة الحاسبة أخرجت الأرقام الموضحة فى الجدول المقابل يكون العمال الذين يحملون هذه الأرقام هم العينة المختارة لإجراء هذا الاستبيان.

٥٦	٤٩	١٣٢	١٤١	٢٤٩	٢٧٢
٢٥٤	٢٥٦	٤	٢١٣	٧٤	١٩٨
١٣١	٢	١٥٦	٤٧	١٧٢	١٣
٨	٣	٨٥	٨٢	٩	٣٨
٤١	١٤	٣٤	٢٧٩	١١٨	١٠٣

تمارين 9

على العينات

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ يقوم مقصف أحد المصانع باستطلاع آراء ٤٢٧ موظفًا لمعرفة ما يفضلون تناوله فى فترة الراحة التى تمتد لمدة ١٥ دقيقة وتم إعطاء كل موظف رقمًا من ١ حتى ٤٢٧ فتم اختيار عينة بنسبة ١٠٪ لسؤالهم واختيار ما يفضلون من بين :

• مشروبات ساخنة. • شوربة ساخنة مع الخبز.

• مشروبات باردة مع البسكويت. • فاكهة مع مياه نقية.

ويتم تحديد العينة باختيار ٤٣ رقمًا من الأرقام المتاحة باستخدام الآلة الحاسبة.

حدد أرقام العينة باستخدام الآلة الحاسبة.

---

٢ تقوم إحدى المدارس الإعدادية بدراسة عن كيفية ذهاب التلاميذ إلى المدرسة فإذا كان عدد تلاميذ المدرسة ٣٢٠ تلميذًا وتم إعطاء كل تلميذ رقمًا من ١ إلى ٣٢٠ واختيار ١٠٪ منهم كعينة لسؤالهم عن طريقة الوصول للمدرسة ما بين :

• سيرًا على الأقدام. • أتوبيس عام. • تاكسى.

• دراجة. • سيارة خاصة.

حدد أرقام العينة باستخدام الآلة الحاسبة.

---

٣ إحدى الشركات تقوم بدراسة عن أفضل الأماكن التى يفضلها العاملون بالشركة لقضاء إجازتهم السنوية من بين :

• بورسعيد. • الإسكندرية. • مطروح.

• الساحل الشمالى. • الإسماعيلية.

إذا كان عدد العاملين بالشركة ٢٥٠ عاملاً فتم اختيار عينة ١٠٪ لإجراء الاستبيان عليها.

حدد أرقام العينة باستخدام الآلة الحاسبة.

---

٤ لُوحظ أن ٢٣٠ شخصًا يستخدمون خط أتوبيس معينًا يوميًا وتريد هيئة النقل العام بعض المعلومات التى تتعلق بالاستخدام اليومى لهذه الخدمة ، فكان لابد من الحصول على عينة عشوائية تمثل ١٠٪ من مستخدمى هذا الخط لإجراء الاستبيان عليهم.

حدد أرقام هذه العينة باستخدام الآلة الحاسبة.

الدرس 2

الاحتمـــــــال




تمهيد

فى حياتنا اليومية كثيرًا ما نتساءل عن بعض الأمور التى يمكن أن تحدث فى المستقبل والتى لا نستطيع التوصل بشكل جازم مؤكد إلى نتيجتها **فمثلًا :**



- إذا تأهل المنتخب المصرى لكرة القدم إلى نهائيات بطولة كأس الأمم الأفريقية فما فرصته فى الحصول على الكأس ؟



- إذا تقدم أحد الأشخاص المصريين لانتخابات مجلس النواب فى إحدى الدوائر فما فرصته فى الفوز بأحد مقاعد المجلس ؟

كل هذه الأسئلة السابقة وغيرها من الأسئلة تتضمن الإجابة عنها التنبؤ بما يمكن أن يحدث فى المستقبل استنادًا على الخبرات السابقة أو الدراسات والملاحظات ، وعند الإجابة نستخدم ألفاظًا مثل «يجوز» أو «فرصة» أو «محتمل» وهذا ما يُسمى فى الرياضيات بـ **«الاحتمال»**.

وفى هذا الدرس سوف نتعرض لدراسة :

١ الاحتمال التجريبى.   ٢ الاحتمال النظرى.

١ الاحتمال التجريبى

* إذا أراد أحد السباحين الأوليمبيين تحقيق رقم قياسى جديد فى الأوليمبياد القادمة ... فما احتمال تحقيقه لهذا الرقم ؟ والإجابة عن هذا السؤال لا تصلح بالتوقع أو بالتمنى أو باستطلاع رأى المدربين أو بسؤال السباح نفسه ولكن تصلح بالتجريب.

* أى أن يقوم هذا السباح بقطع المسافة المطلوبة فى السباق عدة مرات ثم نرصد المرات التى استطاع فيها تحقيق الرقم المطلوب ونقسمها على العدد الكلى للمرات فيكون الناتج هو احتمال تحقيقه للرقم القياسى الجديد فى الأوليمبياد القادمة.

* الاحتمال التجريبى يعتمد على إجراء تجربة عمليًا ثم يتم تسجيل النتائج واستخدام هذه النتائج فى حساب قيمة احتمال حدث ما باستخدام القانون :

$$\text{الاحتمال التجريبى لحدث ما} = \frac{\text{عدد مرات الحصول على الحدث}}{\text{عدد المحاولات الكلى}}$$

ويُلاحظ أنه : كلما ازداد عدد مرات إجراء التجربة كلما حصلنا على قيمة أدق للاحتمال.

مثال ١

إذا رمينا قطعة نقود ذات وجهين ٢٠٠ مرة وأمكن تسجيل نتائج ظهور الصورة أو الكتابة عند كل رمية فى جدول كما هو مبين :



	صورة	كتابة	المجموع
العلامة الإحصائية	(علامات إحصائية)	(علامات إحصائية)	
التكرار	١٠٦	٩٤	٢٠٠

احسب : ١ احتمال ظهور الصورة. ٢ احتمال ظهور الكتابة.

الحـــل

١ احتمال ظهور الصورة $= \frac{\text{عدد مرات ظهور الصورة}}{\text{عدد الرميات الكلى}} = \frac{١٠٦}{٢٠٠} = ٠,٥٣$

٢ احتمال ظهور الكتابة $= \frac{\text{عدد مرات ظهور الكتابة}}{\text{عدد الرميات الكلى}} = \frac{٩٤}{٢٠٠} = ٠,٤٧$

حاول بنفسك ١

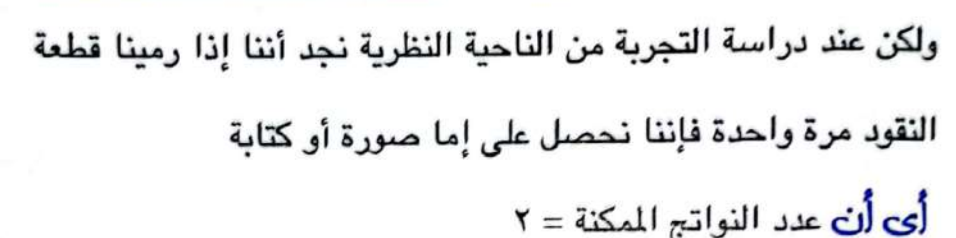
ألقِ حجر نرد منتظم ٢٥ مرة وسجل فى جدول نتائج ظهور رقم على الوجه العلوى ثم احسب :

١ احتمال ظهور رقم ٤   **٢ احتمال ظهور رقم ٣**

٢ الاحتمال النظرى

* **أجرينا فيما سبق تجربة إلقاء قطعة نقود ووجدنا أن :**

احتمال ظهور صورة = ٠,٥٣ ، احتمال ظهور كتابة = ٠,٤٧





ولكن عند دراسة التجربة من الناحية النظرية نجد أننا إذا رمينا قطعة النقود مرة واحدة فإننا نحصل على إما صورة أو كتابة

أى أن عدد النواتج الممكنة = ٢

وتوجد فرصة واحدة للحصول على صورة وفرصة واحدة للحصول على كتابة (أى أن جميع نواتج التجربة لها نفس الفرصة فى الحدوث).

أى أن : احتمال ظهور صورة = $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥٠

، احتمال ظهور كتابة = $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥٠

لاحظ أن :
يمكن التعبير عن الاحتمال بنسبة مئوية فنكتب احتمال ظهور صورة = ٥٠٪

! ملاحظة

لاحظ الاختلاف بين الاحتمال التجريبى لظهور صورة «٠,٥٣» وبين الاحتمال النظرى لظهور صورة «٠,٥٠»
ونشير إلى أنه كلما زاد عدد مرات إجراء التجربة كلما اقتربت قيمة الاحتمال التجريبى من قيمة الاحتمال النظرى.

التجربة العشوائية

هى تجربة نستطيع تحديد جميع نواتجها قبل إجرائها وإن كنا لا نستطيع تحديد أى هذه النواتج سيتحقق فعلاً عند إجرائها.

فضاء العينة

هو مجموعة كل النواتج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز لها بالرمز ف

فمثلًا : • عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة فإن : ف = {صورة ، كتابة}

• عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الرقم الذى يظهر على الوجه العلوى

فإن : ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

الحدث

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

فمثلًا : إذا كان أ هو حدث ظهور رقم فردى عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوى.

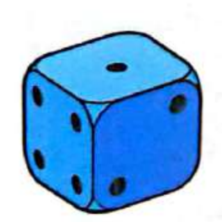
فإن : أ = {١ ، ٣ ، ٥} ، أ ⊂ ف

وبصفة عامة

احتمال وقوع أى حدث أ ⊂ ف يُرمز له بالرمز ل (أ) ويُعطى بالعلاقة :

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$$

مثال ٢



إذا أُلقى حجر نرد منتظم مرة واحدة ولُوحظ الرقم الظاهر على الوجه العلوى أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ أ هو حدث ظهور رقم أكبر من ٤ (مقربًا الناتج لأقرب جزء من مائة)

٢ ب هو حدث ظهور رقم زوجى.

٣ حـ هو حدث ظهور رقم يساوى ٥ (مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة)

٤ ء هو حدث ظهور رقم يساوى ٧

٥ هـ هو حدث ظهور رقم أقل من ٧

الحـــل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ن (ف) = ٦

١ أ = {٥ ، ٦} ، ن (أ) = ٢ $\therefore$ ل (أ) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$ ≃ ٠,٣٣ لأقرب جزء من مائة

٢ ب = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ن (ب) = ٣ $\therefore$ ل (ب) = $\frac{٣}{٦}$ = ٠,٥

٣ حـ = {٥} ، ن (حـ) = ١ $\therefore$ ل (حـ) = $\frac{١}{٦}$ ≃ ٠,٢ لأقرب جزء من عشرة

٤ ء = { } أ، $\varnothing$ ، ن (ء) = صفر $\therefore$ ل (ء) = $\frac{٠}{٦}$ = ٠ (حدث مستحيل)

٥ هـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ن (هـ) = ٦

$\therefore$ ل (هـ) = $\frac{٦}{٦}$ = ١ (حدث مؤكد)

ملاحظات

١ **الحدث المستحيل** : هو الحدث الذى ليس له أى فرصة للوقوع.

أى أن : احتمال الحدث المستحيل = صفر

٢ **الحدث المؤكد** : هو الحدث الذى له كل النواتج الممكنة.

أى أن : احتمال الحدث المؤكد = ١

٣ قيمة احتمال وقوع أى حدث لا تقل عن صفر ولا تزيد عن الواحد الصحيح.

أى أن : ٠ ≤ احتمال وقوع أى حدث ≤ ١

مثال ٨

من مجموعة الأرقام {٣ ، ٤ ، ٥} كون عددًا من رقمين ثم أوجد احتمال كل من الأحداث التالية :

١ أ حدث أن يكون رقم الآحاد فرديًا.

٢ ب حدث أن يكون رقم العشرات زوجيًا.

٣ حـ حدث أن يكون كلا الرقمين فرديًا.

٤ ء حدث أن يكون مجموع الرقمين ٨

٥ هـ حدث أن يكون حاصل ضرب الرقمين ٢٠

الحـــل

ف = {٣٣ ، ٤٣ ، ٥٣ ، ٣٤ ، ٤٤ ، ٥٤ ، ٣٥ ، ٤٥ ، ٥٥} ، ن (ف) = ٩

١ أ = {٣٣ ، ٤٣ ، ٥٣ ، ٣٥ ، ٤٥ ، ٥٥} ، ن (أ) = ٦ ∴ ل (أ) = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

٢ ب = {٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥} ، ن (ب) = ٣ ∴ ل (ب) = $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{١}{٣}$

٣ حـ = {٣٣ ، ٥٣ ، ٣٥ ، ٥٥} ، ن (حـ) = ٤ ∴ ل (حـ) = $\frac{٤}{٩}$

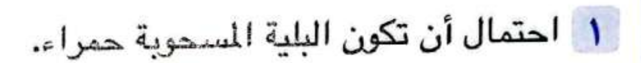
٤ ء = {٥٣ ، ٤٤ ، ٣٥} ، ن (ء) = ٣ ∴ ل (ء) = $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{١}{٣}$

٥ هـ = {٥٤ ، ٤٥} ، ن (هـ) = ٢ ∴ ل (هـ) = $\frac{٢}{٩}$

مثال ٤

كيس به كمية من البلى الذى له نفس الحجم والملمس فإذا كانت بليتان منه حمراء اللون ، ٣ زرقاء ، ٥ بيضاء وسُحبت بلية واحدة عشوائيًا فاحسب :

١ احتمال أن تكون البلية المسحوبة حمراء.



٢ احتمال أن تكون البلية المسحوبة زرقاء.

٣ احتمال أن تكون البلية المسحوبة بيضاء.

٤ احتمال أن تكون البلية المسحوبة ليست زرقاء.

الحل

احتمال حدوث ناتج معين = $\frac{\text{عدد الفرص الممكنة للحصول على هذا الناتج}}{\text{العدد الكلى للفرص}}$

، ∵ العدد الكلى للبلى = ٢ + ٣ + ٥ = ١٠

١ احتمال أن تكون البلية المسحوبة حمراء = $\frac{\text{عدد البلى الأحمر}}{\text{العدد الكلى للبلى}}$ = $\frac{٢}{١٠}$ = $\frac{١}{٥}$

٢ احتمال أن تكون البلية المسحوبة زرقاء = $\frac{\text{عدد البلى الأزرق}}{\text{العدد الكلى للبلى}}$ = $\frac{٣}{١٠}$

٣ احتمال أن تكون البلية المسحوبة بيضاء = $\frac{\text{عدد البلى الأبيض}}{\text{العدد الكلى للبلى}}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

٤ احتمال أن تكون البلية المسحوبة ليست زرقاء = $\frac{\text{عدد البلى غير الأزرق}}{\text{العدد الكلى للبلى}}$ = $\frac{١٠ - ٣}{١٠}$ = $\frac{٧}{١٠}$

ملاحظـة

فى المثال السابق لاحظ أن :

ل (بلية حمراء) = $\frac{٢}{١٠}$ ، ل (بلية زرقاء) = $\frac{٣}{١٠}$ ، ل (بلية بيضاء) = $\frac{٥}{١٠}$

، ∵ $\frac{٢}{١٠}$ + $\frac{٣}{١٠}$ + $\frac{٥}{١٠}$ = ١

أى أن : مجموع احتمالات جميع نواتج أى تجربة عشوائية = ١

ومن هنا فإنه : إذا كان احتمال وقوع حدث ما هو أ فإن احتمال عدم وقوعه = ١ − أ

وعلى هذا يمكن إيجاد احتمال أن تكون البلية المسحوبة ليست زرقاء كما يلى :

احتمال أن تكون البلية المسحوبة ليست زرقاء = ١ − احتمال أن تكون زرقاء

= ١ − $\frac{٣}{١٠}$ = $\frac{٧}{١٠}$

مثال ٥

فصل دراسى به بعض التلاميذ يرتدون نظارات ، والبعض الآخر لا يرتدون نظارات فإذا اختير تلميذ عشوائيًا من هذا الفصل ، وكان احتمال أن يكون هذا التلميذ يرتدى نظارة هو ٠,١ .



١ أوجد احتمال أن يكون هذا التلميذ لا يرتدى نظارة.

٢ إذا كان عدد تلاميذ هذا الفصل ٣٠ تلميذًا فأوجد العدد المتوقع للتلاميذ الذين يرتدون نظارات.

الحـــل

١ احتمال أن يكون هذا التلميذ لا يرتدى نظارة = ١ − احتمال أن يكون مرتديًا نظارة.

= ١ − ٠,١ = ٠,٩

٢ ∵ العدد المتوقع لنواتج حدث معين

= احتمال وقوع هذا الحدث × العدد الكلى لجميع النواتج الممكنة

∴ العدد المتوقع للتلاميذ الذين يرتدون نظارات = ٠,١ × ٣٠ = ٣ تلاميذ.

مثال ٦

في لعبة الدوارة إذا كان القرص مقسمًا إلى عدد من القطاعات المتساوية وكان لون اثنين منهم أخضر وأربعة أخرون لونهم أزرق والباقي لونه أحمر فإذا كان احتمال وقوف المؤشر عند اللون الأخضر هو $\frac{١}{٦}$ أوجد عدد القطاعات الحمراء.

الحل

∵ احتمال وقوف المؤشر عند اللون الأخضر = $\frac{\text{عدد القطاعات الخضراء}}{\text{العدد الكلي للقطاعات}}$

∴ $\frac{١}{٦} = \frac{٢}{\text{العدد الكلي للقطاعات}}$

∴ العدد الكلي للقطاعات = ٢ × ٦ = ١٢ قطاعًا

∴ عدد القطاعات الحمراء = ١٢ − (٢ + ٤) = ٦ قطاعات

حاول بنفسك ٢

١ صندوق به بطاقات مرقمة بالأعداد من ١ : ١٥ فإذا سحبت بطاقة عشوائيًا من الصندوق فما احتمال أن يكون العدد المكتوب عليها يقبل القسمة على ٥ ؟

٢ تجربة ما عدد نواتجها ٣ فإذا كان احتمال وقوع الحدث الأول هو ٠,٣ ، واحتمال وقوع الحدث الثاني هو ٠,٤٥ . فاحسب احتمال وقوع الحدث الثالث.

٣ مزرعة بها ٢٠٠٠ بقرة فإذا كان احتمال الإصابة بمرض جنون البقر بهذه المزرعة هو ٠,١٧ . فما عدد البقر المحتمل إصابته ؟

إجابات حاول بنفسك

١ أجب بنفسك بعد عمل التجربة.

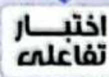
٢ (١) احتمال أن يكون العدد المكتوب عليها يقبل القسمة على ٥ = $\frac{٣}{١٥} = \frac{١}{٥}$

(٢) احتمال وقوع الحدث الثالث = ١ − (٠,٣ + ٠,٤٥) = ٠,٢٥

(٣) عدد البقر المحتمل إصابته = ٣٤٠ بقرة.

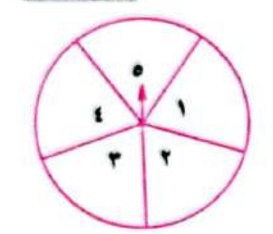
تمارين 10
على الاحتمال





• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

أولاً مسائل على الاحتمال التجريبى

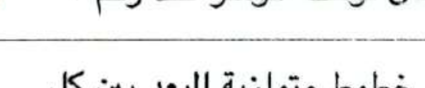


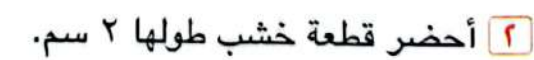
١ **فى تجربة اللعبة الدوارة المقابلة أدر القرص ٥٠ مرة وسجل فى كل مرة الرقم الذى يقف عنده المؤشر فى الجدول التالى :**

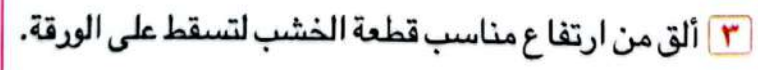
	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
العلامة الإحصائية						
التكرار						٥٠

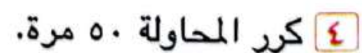
احسب : ١ احتمال توقف المؤشر عند رقم ٢ ٢ احتمال توقف المؤشر عند رقم ٥

---

٢  ١ ارسم ٦ خطوط متوازية البعد بين كل اثنين متتاليين منها ٢ سم على ورقة بيضاء.

 ٢ أحضر قطعة خشب طولها ٢ سم.

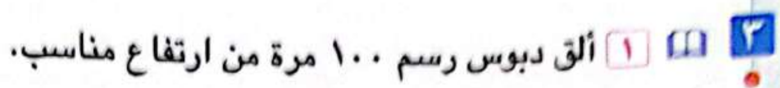
 ٣ ألق من ارتفاع مناسب قطعة الخشب لتسقط على الورقة.

 ٤ كرر المحاولة ٥٠ مرة.

 ٥ سجل عدد المرات التى تسقط فيها قطعة الخشب على الخطوط المتوازية وأيضًا بينها.

	على الخطوط المتوازية	بين الخطوط المتوازية	المجموع
العلامة الإحصائية			
التكرار			٥٠

٦ استنتج احتمال سقوط قطعة الخشب بين الخطوط المتوازية.



٣ (١) ألق دبوس رسم ١٠٠ مرة من ارتفاع مناسب.



(٢) سجل عدد المرات التي يقع فيها الدبوس على رأسه أو على قاعدته.

	رأس الدبوس لأعلى	رأس الدبوس مائل	المجموع
العلامة الإحصائية			
التكرار			١٠٠

(٣) استنتج احتمال سقوط الدبوس ورأسه لأعلى أو رأسه مائل.

ثانيا مسائل على الاحتمال النظرى

١ عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوى

أكمل ما يأتى :



(١) احتمال ظهور عدد أكبر من ٢ = ...

(٢) احتمال ظهور عدد أقل من ٣ = ...

(٣) احتمال ظهور عدد زوجى = ...

(٤) احتمال ظهور العدد ٤ = ...

(٥) احتمال ظهور العدد ٧ = ...

(٦) احتمال ظهور عدد أقل من أو يساوى ٦ = ...

(٧) احتمال ظهور عدد أولى = ...

(٨) احتمال ظهور عدد زوجى أولى = ...

(٩) احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على ٥ = ...

(١٠) احتمال ظهور العدد ٥ أو ٦ = ...

٢ أكمل ما يأتى :

١ احتمال وقوع الحدث المستحيل = …………… واحتمال وقوع الحدث المؤكد = ……………

٢ إذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة = ……………

٣ ١٠ بطاقات مرقمة من ١ إلى ١٠ فإذا سُحبت بطاقة عشوائيًا فإن احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا فرديًا = ……………

٤ فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوى فإن احتمال ظهور عدد أقل من ١ يساوى ……………

٥ صندوق يحتوى على ٤٨ برتقالة منها ٤ برتقالات تالفة فإذا سُحبت من الصندوق برتقالة عشوائيًا فإن احتمال أن تكون هذه البرتقالة تالفة = ……………

واحتمال أن تكون غير تالفة = ……………

٦ إذا كان احتمال وقوع حدث ما = $\frac{٥}{٨}$ فإن احتمال عدم وقوعه = ……………

٧ حجرة نشاط لها ٣ أبواب مرقمة من ١ إلى ٣ فإذا خرج طالب من أحد أبوابها فإن احتمال أن يكون الطالب قد خرج من الباب رقم ٢ هو ……………

٨ إذا كان احتمال إصابة شخص بمرض ما من بين سكان مدينة عدد سكانها ٢٠٠٠٠٠ نسمة هو ٠,٠٠٣ فإن العدد المتوقع للأشخاص المصابين بهذا المرض فى هذه المدينة هو …………… شخصًا.

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أى من الآتى يمكن أن يكون احتمال وقوع أحد الأحداث ؟

(أ) ١,٢ (ب) −٠,٤ (جـ) ٣١٥٪ (د) ٧٥٪

٢ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، احتمال ظهور عدد أكبر من ٤ هو ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

٣ سلة بها بطاقات مكتوب عليها الأعداد من ١ إلى ٢٠ فإذا سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا ، فما احتمال أن يقبل العدد المكتوب على البطاقة القسمة على ٦ ؟

(أ) $\frac{٣}{٢٠}$ (ب) $\frac{٤}{٢٠}$ (جـ) $\frac{٥}{٢٠}$ (د) $\frac{٦}{٢٠}$

٤ كيس يحتوى على ٥ كرات حمراء ، ٣ كرات بيضاء فإذا كانت الكرات متماثلة وسحب شخص كرة عشوائيًا فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٨}$ (جـ) $\frac{٥}{٨}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

٥ اختير عشوائيًا حرف من حروف «مدرسة» فما احتمال أن يكون هذا الحرف «س» ؟

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

٦ رشاد تلميذ فى الصف الأول الإعدادى فى فصله ٣٦ تلميذًا منهم ١٦ بنتًا إذا اختير تلميذ عشوائيًا من الفصل ، ما احتمال أن يكون التلميذ ولدًا ؟

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٥}{٩}$ (د) $\frac{١}{٣٦}$

٧ فصل به ٢٥ ولدًا ، ٢٠ بنتًا فإذا اختير أحدهم عشوائيًا فإن احتمال اختيار بنت هو ....

(أ) $\frac{١}{٢٠}$ (ب) $\frac{٤}{٩}$ (جـ) $\frac{١}{٢٥}$ (د) $\frac{٥}{٩}$

٨ إذا كان احتمال نجاح طالب ٧٠ ٪ فإن احتمال رسوبه = ...

(أ) ٠,٧ (ب) ٠,٠٧ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٠٣

٤ سُحبت بطاقة عشوائيًا من ٢٥ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٢٥

احسب احتمال أن تحمل البطاقة عددًا :

١ يقبل القسمة على ٥ ٢ أكبر من أو يساوى ٢٠ ٣ مربعًا كاملاً.

٥ سُحبت بطاقة عشوائيًا من ثمانى بطاقات مرقمة من ١ إلى ٨ اكتب فضاء العينة ثم أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ حدث الحصول على عدد زوجي.

٢ حدث الحصول على عدد فردى.

٣ حدث الحصول على عدد أكبر من أو يساوى ٦

٤ حدث الحصول على عدد يقبل القسمة على ٣

---

٦ سُحبت بطاقة مكتوب عليها حرف من حروف «تفاح» ما احتمال أن يكون الحرف :

١ ت ؟ ٢ ف ؟ ٣ ع ؟

---

٧ كيس يحتوى على ٥ كرات حمراء ، ٣ كرات صفراء ، كرتين سوداوين

فإذا كانت الكرات جميعها متماثلة وسحبت من الكيس كرة عشوائيًا فأوجد :

١ احتمال أن تكون الكرة المسحوبة صفراء.

٢ احتمال أن تكون الكرة المسحوبة صفراء أو حمراء.

٣ احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست صفراء.

---

٨ سُحبت بطاقة عشوائيًا من بطاقات مرقمة من ١ إلى ١٠

ما احتمال أن تكون البطاقة تحمل عددًا :

١ فرديًا ؟ ٢ أوليًا ؟

٣ زوجيًا ؟ ٤ فرديًا أكبر من ٣ ؟

---

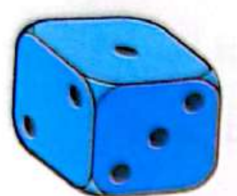
٩ إذا أُلقى حجر نرد منتظم مرة واحدة

فما احتمال كل من الأحداث التالية :

١ ظهور عدد زوجى أقل من أو يساوى ٤ ٢ ظهور عدد بين ٠ ، ١٠

٣ ظهور عدد يقبل القسمة على ٧ ٤ ظهور عدد لا يقبل القسمة على ٢

١٠ في تجربة لإلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة عدد النقط الذى يظهر على الوجه العلوى. اكتب فضاء العينة ، ثم أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :



١ حدث الحصول على عدد أكبر من ٦

٢ حدث الحصول على عدد يحقق المتباينة : ١ ≤ س ≤ ٦

٣ حدث الحصول على عدد يحقق المتباينة : ٢ < س < ٤

---

١١ وضعت ٨ بطاقات مرقمة بالأرقام المقابلة فى حقيبة.

٢	١٨	١٠	٤٨
٢٤	١٥	٣٦	١٧

سحب باسم بطاقة واحدة من هذه الحقيبة دون النظر إليها أوجد :

١ احتمال أن تحمل البطاقة عددًا رقم عشراته زوجى.

٢ احتمال أن تحمل البطاقة عددًا رقم آحاده فردى.

٣ احتمال أن تحمل البطاقة عددًا من مضاعفات العدد ٤

---

١٢ صُمم مكعب بحيث يحمل كل وجهين متقابلين فيه أحد الأرقام التالية ١ ، ٢ ، ٣ ألقى المكعب مرة واحدة ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى.

١ اكتب فضاء العينة للنواتج.

٢ ما احتمال أن يكون العدد الظاهر على الوجه العلوى ٢ ؟

٣ ما احتمال أن يكون العدد الظاهر على الوجه العلوى فرديًا ؟

---

١٣ حقيبة تحتوى على ٣٠ بلية متماثلة فإذا سحب هانى بلية عشوائيًا ووجدها حمراء ، وكان احتمال سحب بلية حمراء يساوى $\frac{٢}{٥}$ **فأوجد عدد البلى الأحمر فى الحقيبة.**

---

١٤ صندوق يحتوى على ٨٠ كرة متماثلة بعضها أحمر والباقى أزرق فإذا كان احتمال سحب كرة حمراء هو $\frac{١}{٤}$ **فأوجد عدد الكرات الزرقاء.**

١٥ من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٥} كون عددًا من رقمين ما احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ حدث أن يكون رقم العشرات فرديًا.
٢ حدث أن يكون رقم الآحاد فرديًا.
٣ حدث أن يكون مجموع الرقمين ٧
٤ حدث أن يكون حاصل ضرب الرقمين ١٥

---

١٦ وائل لدية حقيبة بها ٢٢ بلية منها ١٢ سوداء ، والباقية حمراء فإذا سحبت منها بليتان دون إرجاعهما إلى الحقيبة وكانتا حمراوين ثم سحبت بلية ثالثة دون النظر إليها **فما احتمال أن تكون سوداء ؟**

---

١٧ فصل دراسي به ٥٠ طالبًا ، عدد البنات ينقص عن عدد البنين بمقدار ١٠ فإذا اختير أحد الطلاب عشوائيًا **فأوجد احتمال أن يكون الطالب ولدًا.**

---

١٨ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

١ كيس يحتوى على ٣ كرات بيضاء ، كرتين سوداوين ، كرة واحدة حمراء فإذا سحبت كرة عشوائيًا من الكيس فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست سوداء يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٦}$

٢ كيس يحتوى على عدد من الكرات المتماثلة نصفها حمراء وثلثها سوداء والباقى بيضاء فإذا سحبت كرة عشوائيًا فإن احتمال أن تكون الكرة بيضاء يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) صفر

٣ صندوق به كرات ملونة بالألوان الأحمر والأخضر والأزرق والأصفر فإذا كان بالصندوق ٢٠ كرة صفراء وكان احتمال سحب كرة صفراء عشوائيًا من الصندوق هو $\frac{١}{٤}$ ، فما عدد كل الكرات فى الصندوق ؟

(أ) ٥ (ب) ٢٥ (جـ) ٦٠ (د) ٨٠

٤ عدد تلاميذ أحد فصول الصف الأول الإعدادى ٣٦ تلميذًا ، إذا كان احتمال اختيار تلميذ يقل عمره عن أو يساوى ١٣ سنة هو $\frac{١}{٦}$ ، فما عدد التلاميذ فى الفصل الذين تزيد أعمارهم عن ١٣ سنة ؟

(أ) ٢٣ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٠ (د) ٣٢

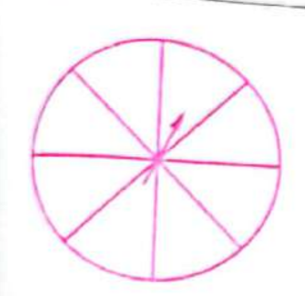
٥ في مدرسة مشتركة إذا كانت نسبة عدد الأولاد إلى عدد البنات كنسبة ٧ : ٩ ، اختير طالب عشوائيًا من هذه المدرسة فاحتمال أن يكون الطالب المختار ولدًا يساوى ....

(أ) صفر (ب) $\frac{٧}{١٦}$ (جـ) $\frac{٩}{١٦}$ (د) ٧

٦ يحتوى الصندوق الصغير على ٢٥ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٢٥ والصندوق الكبير به ٥٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٥٠ ، بدون النظر إليهما سحبت بطاقة من أحدهما . أى من الصندوقين يعطى فرصة أكبر لتكون البطاقة عليها العدد ١٧ ؟

(أ) الصندوق الكبير. (ب) الصندوق الصغير.

(جـ) كلا الصندوقين يعطيان نفس الفرصة. (د) المعلومات المعطاة غير كافية.



١٩ لعبة الدوارة المقابلة مقسمة إلى ٨ قطاعات دائرية متساوية المساحة. لون $\frac{١}{٨}$ القطاعات باللون الأحمر ، ولون $\frac{١}{٤}$ القطاعات باللون الأخضر ، ولون $\frac{٣}{٨}$ القطاعات باللون الأزرق ، ولون باقى القطاعات باللون الأصفر ، فإذا أدير سهم اللعبة ، فما احتمال توقف السهم على اللون الأصفر أو الأحمر ؟

٢٠ فصل دراسى به ٤٠ تلميذًا نجح منهم ٣٠ تلميذًا فى الرياضيات ، ٢٤ تلميذًا فى العلوم ، ٢٠ تلميذًا فى الامتحانين. فإذا اختير تلميذ عشوائيًا.

أوجد احتمال أن يكون التلميذ المختار :



١ ناجحًا فى الرياضيات. ٢ ناجحًا فى العلوم.

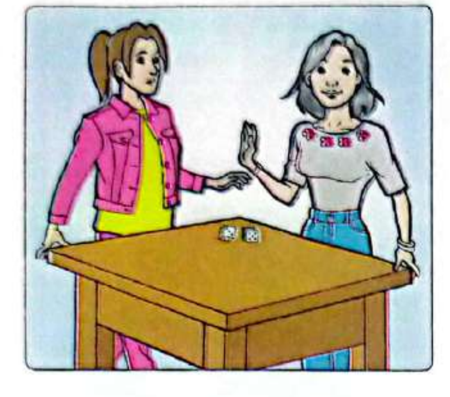
٣ راسبًا فى العلوم. ٤ راسبًا فى الرياضيات والعلوم معًا.



٢١ لاعبان فى فريق لكرة القدم فى أثناء التدريب سدد أحدهما ٢١ ركلة جزاء فأحرز منها ١٨ هدفًا وسدد الآخر ٣٢ ركلة جزاء فأحرز منها ٢٥ هدفًا

من منهما تختاره لتسديد ركلة الجزاء فى أثناء المباراة ؟ ولماذا ؟

٢٢ تلعب مريم وسعاد معًا بحجرى نرد (زهرى طاولة).



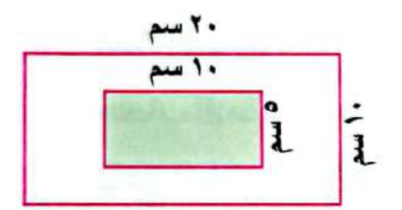
إذا كان حاصل ضرب العددين الظاهرين على وجهيهما العلويين زوجيًا تفوز سعاد ، إذا كان حاصل ضرب العددين الظاهرين عليهما فرديًا تفوز مريم.

١ هل تجد نظام اللعبة عادلاً ؟ ولماذا ؟

٢ وإذا لم يكن كذلك ، فمن من البنتين فرصتها أكبر فى الفوز ؟ ولماذا ؟

---

٢٣ فى الشكل المقابل :



إذا صوب شخص على اللوحة المرسومة

فأوجد احتمال إصابة المنطقة المظللة.

للمتفوقين

٢٤ كيس يحتوى على عدد من الكرات المتماثلة منها ٥ كرات بيضاء والباقى من اللون الأحمر فإذا كان احتمال سحب كرة حمراء يساوى $\frac{٢}{٣}$ **فأوجد العدد الكلى للكرات.**

---

٢٥ سُحبت بطاقة عشوائيًا من مجموعة بطاقات مرقمة بالأرقام من ١ إلى ن فإذا كان احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة عليها رقم أكبر من ٨ هو $\frac{١}{٣}$ **فأوجد قيمة ن**

مشروع بحثى

على الوحدة الثانية



أهداف المشروع

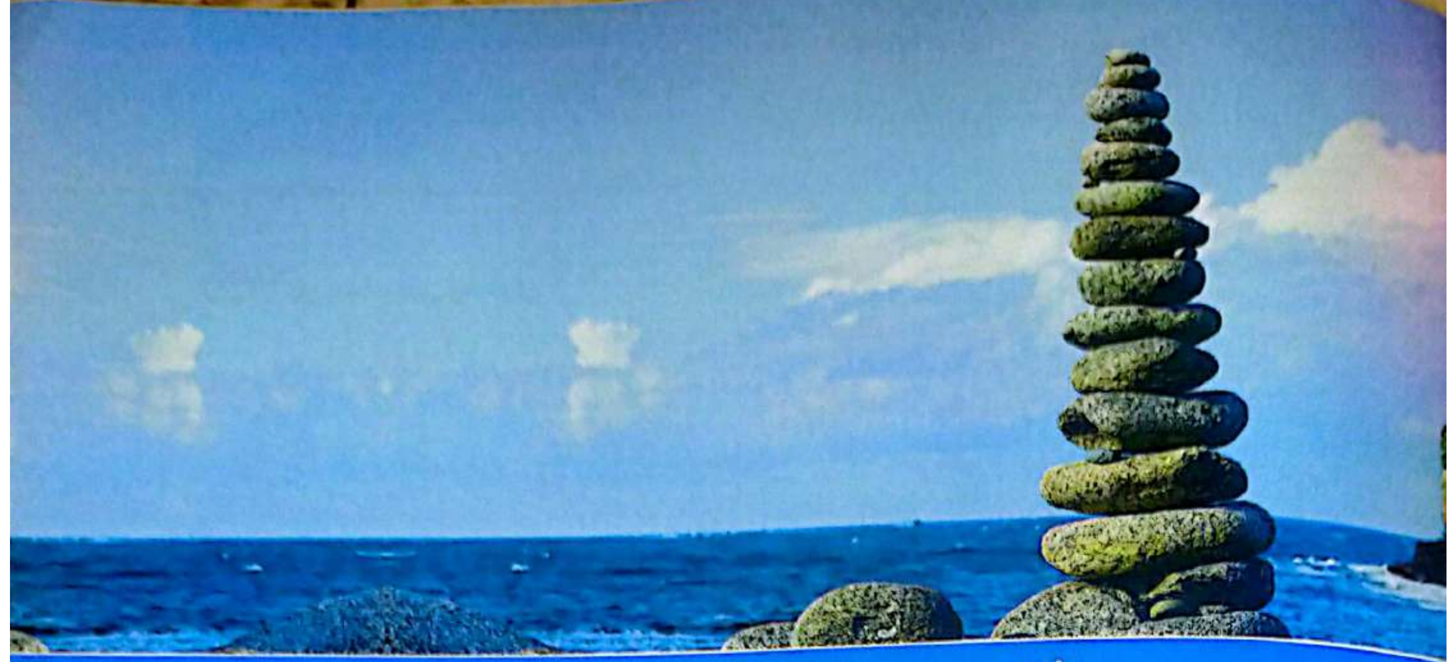
- جمع البيانات وتنظيمها.
- عمل الاستبيانات على عينة من المجتمع.
- حساب الاحتمال.
- توقع النتائج فى ضوء دراسة العينات.
- ربط الرياضيات بالحياة.

المطلوب

« تلعب الاحتمالات دورًا هامًا فى حياتنا اليومية؛ فهى تسمح لنا بتوقع وقوع حدث ما أو عدم وقوعه »

فى ضوء ذلك قُم بإعداد مشروع بحثى يتضمن ما يلى :

1. قم بعمل استبيان على أصدقائك بالفصل بسؤال كل منهم عن اللعبة الرياضية المفضلة له.
2. سجل إجابات أصدقائك فى جدول العلامات.
3. احسب احتمال أفضلية كل لعبة.
4. بمعرفة عدد الطلاب بمدرستك وفى ضوء حساب الاحتمالات السابقة توقع عدد الطلاب بمدرستك الذين يفضلون كل لعبة.
5. اكتب نبذة مختصرة عن أهمية ممارسة الرياضة فى حياتنا.



مفاهيم ومهارات أساسية تراكمية

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 $٣ س^٢ + ٢ س + ٢ س^٢ - س =$ ....

(أ) ٦ س   (ب) $٦ س^٢$ (جـ) $٥ س^٢ + س$ (د) $٧ س^٢ - س$

2 إذا كان : $ص = \frac{أ + ب}{حـ}$ وكان : أ = ٨ ، ب = -٦ ، حـ = -٢

فإن : ص = ...

(أ) -١   (ب) ١   (جـ) -٧   (د) ٧

3 عند قسمة ١١٣ + ١١٣ + ١١٣ + ١١٣ على ٤ فإن الباقى = ...

(أ) صفر   (ب) ١   (جـ) ٤   (د) ١٣

4 ٤ (٣ + س) = ...

(أ) ١٢ + س   (ب) ٧ + س   (جـ) ١٢ + ٤ س   (د) ١٢ س

5 $\frac{٤}{١٠} + \frac{٣}{١٠٠} =$ ....

(أ) ٠,٣٤   (ب) ٠,٤٣   (جـ) ٤,٣   (د) ٣,٤

6 إذا كان ثلاثة أمثال عدد يساوى ٢٧ فإن $\frac{١}{٩}$ هذا العدد هو ....

(أ) ١   (ب) ٣   (جـ) ٩   (د) ٢٧

٧ أى مما يأتى يساوى $\frac{٣}{٥}$ ؟

(أ) ٦ ٪ (ب) ٦٠ ٪ (جـ) $\frac{٩}{١٠}$ (د) ٠,٥٣

٨ إذا كان الكسران : $\frac{٤}{١٤}$ ، $\frac{س}{٢١}$ متساويين فإن : س = ...

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ١١ (د) ١٤

٩ ٢ × ٤ × ٦ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٤}$ × $\frac{١}{٦}$ = ...

(أ) ٤٨ (ب) ٢٣٠٤ (جـ) ١ (د) صفر

١٠ قام عامل بقطع جزء من ماسورة يساوى $\frac{١}{٥}$ هذه الماسورة ، فإذا كان طول الجزء المقطوع يساوى ٣ م فإن طول الماسورة بالكامل = ...

(أ) ٨ م (ب) ١٢ م (جـ) ١٥ م (د) ١٨ م

١١ أى مما يأتى يعبر عن العدد ٣٦ كحاصل ضرب عوامله الأولية ؟

(أ) ٦ × ٦ (ب) ٤ × ٩ (جـ) ٤ × ٣ × ٣ (د) ٢ × ٢ × ٣ × ٣

١٢ ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ × ٠ = ...

(أ) ١٢٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٢٠ (د) صفر

١٣ ضعف مربع العدد (نصف) هو ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

١٤ إذا كان عدد الأولاد فى إحدى الحفلات هو م وعدد البنات ن وكان كل شخص يحمل عدد ٢ بالونة فأى من المقادير الآتية يعبر عن عدد البالونات فى هذا الحفل ؟

(أ) ٢ (م + ن) (ب) ٢ + (م + ن) (جـ) ٢ م + ن (د) م + ٢ ن

١٥ أصغر عدد بين الأعداد التالية هو ....

(أ) ٠,٥٢ (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٠٥٦ (د) ٠,٥٦٢

٢ أكمل ما يأتى :

١ $٢٤,٦٥ + ٥,٧٤٨ =$ ....

٢ $-٢\frac{٣}{٤} \div ١\frac{٣}{٨} =$ ....

٣ ثلث الثلث = ...

٤ $\frac{(١٩)^٢ - ٩ \times ١٩ + ١٩}{١٩} =$ ....

٥ $\frac{٣س}{٨} + \frac{س}{٤} + \frac{س}{٢} =$ .... (فى أبسط صورة)

٦ إذا كان : $ص = ١٠٠ - \frac{١٠٠}{١ + م}$ عند $م = ٩$

فإن : ص = ...

٧ إذا كان : أ + ب = ٢٥ فإن : ٢ أ + ٢ ب = ...

٨ $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، .... (بنفس النمط)

٩ إذا كان : ٣ ص = ٦ فإن : ٥ ص = ...

١٠ إذا كان : $\frac{١}{٢}$ س = ٥ ص = ١٠ فإن : س ص = ...

١١ إذا كان : س + ص = ص س = ٥ فإن : $س^٢ ص + ص^٢ س =$ ....

١٢ إذا كان : س − ص = ٣ ، س + ص = ٥ فإن : $س^٢ - ص^٢ =$ ....

١٣ إذا كان : $س^٢ = ١٦$ ، $ص^٢ = ٩$ ، س ص = ١٢

فإن : $(س - ص)^٢ =$ ....

١٤ إذا كانت درجة الحد الجبرى $٥ س^ن ص^٢$ هى ٥ فإن : ن = ...

١٥ قطعة من الخشب طولها ٤٠ سم ، قُطعت إلى ثلاثة أجزاء أطوالها

٢ س − ٥ ، س + ٧ ، س + ٦ من السنتيمترات

فإن طول أطول قطعة = ... سم.



الهندسة والقياس

الوحدة

3 الهندسة والقياس

دروس الوحدة :



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

مشروع بحثى على الوحدة الثالثة

أهداف الوحدة :

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يستخدم البرهان الاستدلالى لإثبات صحة النظريات.
- يتعرف المضلع والفرق بين المضلع المحدب والمضلع المقعر.
- يوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلة والخارجة لأى مضلع.
- يتعرف المضلع المنتظم ويوجد قياس زاويته الداخلة.
- يتعرف متوازى الأضلاع وخواصه.
- يستنتج متى يكون الشكل الرباعى متوازى أضلاع.
- يتعرف الحالات الخاصة لمتوازى الأضلاع (المستطيل - المعين - المربع).
- يستنتج أن مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث ١٨٠°.
- يتعرف الزاوية الخارجة للمثلث وقياسها.
- يستنتج العلاقة بين طول القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث وطول الضلع الثالث.
- يتعرف نظرية فيثاغورث.
- يتعرف خواص الانعكاس فى مستقيم والانعكاس فى نقطة والانتقال والدوران.
- يوجد صورة شكل هندسى باستخدام الانعكاس والانتقال والدوران.

إقليدس



إقليدس

(٣٢٥ / ٢٦٥ ق. م)

- عالم رياضيات يونانى عاش فى الإسكندرية.
- وضع إقليدس نظام البَدَهِيَّاتِ وجمع عمله فى الهندسة فى كتاب أسماه «الأصول» ومنذ ذلك العهد أعتبرت هندسة إقليدس نموذجًا للبرهان المنطقى.
- بَدَهِيَّاتُ إقليدس :
- الأشياء التى تساوى شيئًا واحدًا تكون متساوية.
- إذا أُضيفت متساويات إلى متساويات فالمجموع يكون متساويًا.
- الأشياء التى تنطبق بعضها على بعض تكون متساوية.
- الكل أكبر من الجزء.

مراجعة
على أهم ما تم دراسته فى الهندسة فى الفصل الدراسى الأول

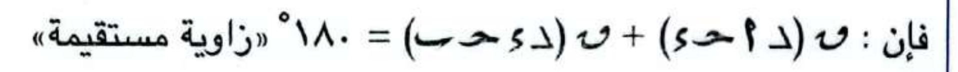
١ العلاقات بين الزوايا

الزاويتان المتجاورتان المتكاملتان

الزاويتان المتجاورتان الحادثتان من تقاطع مستقيم وشعاع – نقطة بدايته تقع على هذا المستقيم – تكونان متكاملتين.

فمثلاً : فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء} = \{حـ\}$



فإن : ق (∠ أ حـ ء) + ق (∠ ء حـ ب) = ١٨٠° «زاوية مستقيمة»

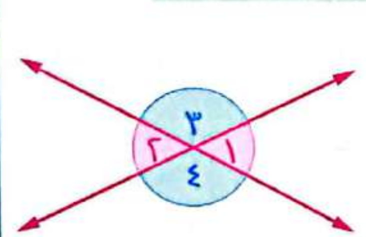
فإذا كان : ق (∠ أ حـ ء) = ١٣٥°

فإن : ق (∠ ء حـ ب) = ١٨٠° – ١٣٥° = ٤٥°

الزاويتان المتقابلتان بالرأس

إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان فى القياس.

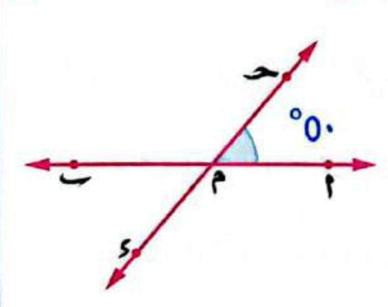
ففى الشكل المقابل :

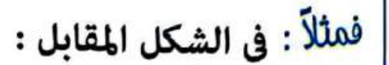


ق (∠ ١) = ق (∠ ٢)

، ق (∠ ٣) = ق (∠ ٤)

فمثلاً : فى الشكل المقابل :





إذا كان : $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء} = \{م\}$

وكان : ق (∠ أ م حـ) = ٥٠°

فإن : ق (∠ ء م ب) = ق (∠ أ م حـ) = ٥٠° (بالتقابل بالرأس)

، ق (∠ حـ م ب) = ١٨٠° – ق (∠ أ م حـ) = ١٨٠° – ٥٠° = ١٣٠°

ويكون : ق (∠ أ م ء) = ق (∠ حـ م ب) = ١٣٠° (بالتقابل بالرأس)

الزوايا المتجاورة المتجمعة حول نقطة

مجموع قياسات الزوايا المتجاورة المتجمعة حول نقطة يساوى ٣٦٠°

ففى الشكل المقابل :

ق (د ١) + ق (د ٢) + ق (د ٣) + ق (د ٤) + ق (د ٥) = ٣٦٠°

فمثلاً : فى الشكل المقابل :

إذا كان : م أ ، م ب ، م حـ ، م ء

أشعة لها نفس نقطة البداية م

فإن : ق (د أ م ب) + ق (د ب م حـ) + ق (د حـ م ء) + ق (د ء م أ) = ٣٦٠°

ويكون : ق (د ء م أ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٤٠° + ٧٠°) = ١٦٠°

٢ التــوازى

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن :

١ كل زاويتين متبادلتين متساويتان فى القياس.

- ق (د ٣) = ق (د ٥) (بالتبادل)
- ق (د ٤) = ق (د ٦) (بالتبادل)

٢ كل زاويتين متناظرتين متساويتان فى القياس.

- ق (د ١) = ق (د ٥) (بالتناظر)
- ق (د ٢) = ق (د ٦) (بالتناظر)
- ق (د ٣) = ق (د ٧) (بالتناظر)
- ق (د ٤) = ق (د ٨) (بالتناظر)

٣ كل زاويتين داخلتين وفى جهة واحدة من القاطع متكاملتان.

- ق (د ٣) + ق (د ٦) = ١٨٠° (داخلتان وفى جهة واحدة من القاطع)
- ق (د ٤) + ق (د ٥) = ١٨٠° (داخلتان وفى جهة واحدة من القاطع)

فمثلًا : في الشكل المقابل :

إذا كان : ‏‏أهـ // ب حـ ، ء ∈ حـ أ

، ق (∠ ء أ هـ) = ٧٠° ، ق (∠ ب) = ٥٠°

فإن :

١ ق (∠ هـ أ ب) = ٥٠° لأن : ق (∠ هـ أ ب) = ق (∠ ب) (بالتبادل)

٢ ق (∠ حـ) = ٧٠° لأن : ق (∠ حـ) = ق (∠ ء أ هـ) (بالتناظر)

٣ ق (∠ هـ أ حـ) = ١١٠°

لأن : ∠ هـ أ حـ ، ∠ حـ داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع أحـ فهما متكاملتان.

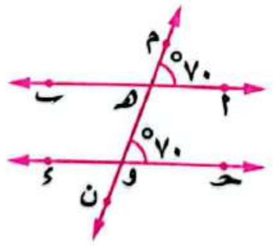
كيف تثبت أن مستقيمين متوازيان ؟

يتوازى المستقيمان إذا قطعهما مستقيم ثالث وحدثت إحدى الحالات الآتية :

1. زاويتان متبادلتان متساويتان في القياس.
2. زاويتان متناظرتان متساويتان في القياس.
3. زاويتان داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع متكاملتان.

لاحظ كلاً من الأشكال التالية حيث أب ، حـ ء مستقيمان ، م ن قاطع لهما :

أب // حـ ء لأن :
ق (∠ ب هـ و) = ق (∠ هـ و حـ)
= ١٢٠°
وهما في وضع تبادل.



أب // حـ ء لأن :
ق (∠ أ هـ م) = ق (∠ حـ و هـ)
= ٧٠°
وهما في وضع تناظر.

أب // حـ ء لأن :
ق (∠ أ هـ و) + ق (∠ حـ و هـ)
= ٦٥° + ١١٥° = ١٨٠°
وهما داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع.

٣ حالات تطابق مثلثين

يتطابق المثلثان إذا تحققت إحدى الحالات الآتية :



١ تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما
في أحدهما مع نظائرها في الآخر.



٢ تطابقت زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما
في أحدهما مع نظائرها في الآخر.

٣ تطابق كل ضلع في أحدهما مع نظيره في الآخر.

٤ يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق
الوتر وأحد ضلعي القائمة في أحدهما مع نظيريهما في الآخر.

الدرس 1

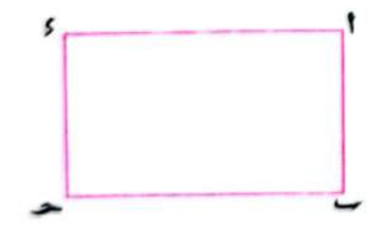
البرهـــان الاستدلالى



* **البرهان الاستدلالى** هو طريقة نظرية لإثبات النظريات والوصول إلى نتائج.

وفى **البرهان الاستدلالى** لا نحتاج إلى استخدام الأدوات الهندسية فى القياس ، بل نستخدم التعاريف والخواص والحقائق والنظريات السابقة للوصول إلى النتائج وذلك بكتابة جمل رياضية بحيث نذكر لكل جملة رياضية السبب الذى يجعلها صحيحة.

فمثلاً :



إذا علمت أن أ ب حـ ء مستطيل

فإنه يمكنك كتابة ما يأتى :

الجملة الرياضية	السبب
• أ ب حـ ء مستطيل	معطى
• أ ب = حـ ء	الأضلاع المتقابلة فى المستطيل متساوية فى الطول
• ق (د ب) = ٩٠°	زوايا المستطيل قوائم
• أ ء // ب حـ	الأضلاع المتقابلة فى المستطيل متوازية

كيف تكتب البرهان فى الهندسة ؟

1. اقرأ المسألة بعناية لتتمكن من تحديد : «المعطيات» وهى كل المعلومات المعطاة فى المسألة ، «المطلوب» وهو السؤال الذى نريد الإجابة عنه فى المسألة.
2. استخدم المعلومات المعطاة فى المسألة لرسم شكل هندسى واضح – وذلك إذا كان الرسم غير معطى – ووضح على الرسم المعلومات المعطاة فى المسألة مثل : أطوال الأضلاع ، قياسات الزوايا وغيرها.
3. اكتب المعطيات على هيئة نقاط.
4. اكتب المطلوب.
5. فكر فى خطة «البرهان» وهى الخطوات الأساسية التى نحتاجها للوصول إلى المطلوب.
6. اكتب البرهان وذلك بكتابة جمل رياضية بحيث أن تذكر لكل جملة السبب الذى يجعل هذه الجملة صحيحة.
7. تأكد من الوصول إلى إجابة السؤال المطلوب فى المسألة.

وفيما يلى أمثلة لكتابة البرهان الاستدلالى :

١ إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس تكونان متساويتين فى القياس.

المعطيات | $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ مستقيمان متقاطعان فى م

المطلوب | إثبات أن : ق (∠ أ م ء) = ق (∠ ب م حـ)

البرهان | ∵ ∠ أ م ء ، ∠ أ م حـ زاويتان متجاورتان

، $\overrightarrow{مح} \cup \overrightarrow{مء} = \overleftrightarrow{حء}$

∴ ق (∠ أ م ء) + ق (∠ أ م حـ) = ١٨٠°

، ∵ ∠ أ م حـ ، ∠ ب م حـ زاويتان متجاورتان

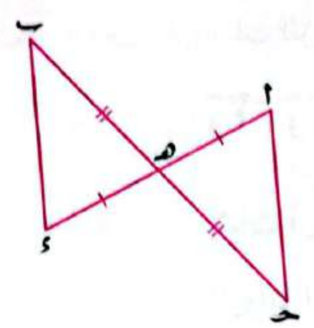
، $\overrightarrow{مأ} \cup \overrightarrow{مب} = \overleftrightarrow{أب}$ ∴ ق (∠ أ م حـ) + ق (∠ ب م حـ) = ١٨٠°

∴ ق (∠ أ م ء) + ق (∠ أ م حـ) = ق (∠ أ م حـ) + ق (∠ ب م حـ)

∴ ق (∠ أ م ء) = ق (∠ ب م حـ) (وهو المطلوب)

وبالمثل يمكنك إثبات أن : ق (∠ أ م حـ) = ق (∠ ب م ء)

مثال 1



في الشكل المقابل :

$\overline{أء} \cap \overline{ب حـ} = \{هـ\}$ بحيث : أ هـ = ء هـ ، ب هـ = حـ هـ

أثبت أن : Δ أ هـ حـ $\equiv \Delta$ ء هـ ب

الحـــل

المعطيات | $\overline{أء} \cap \overline{ب حـ} = \{هـ\}$ ، أ هـ = ء هـ ، ب هـ = حـ هـ

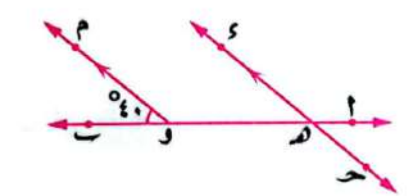
المطلـوب | إثبات أن : Δ أ هـ حـ $\equiv \Delta$ ء هـ ب

البرهـــان | $\because \overline{أء} \cap \overline{ب حـ} = \{هـ\}$ $\therefore$ ق(∠ أ هـ حـ) = ق(∠ ء هـ ب) (بالتقابل بالرأس)

$\therefore$ $\Delta\Delta$ أ هـ حـ ، ء هـ ب فيهما :
- أ هـ = ء هـ (معطى)
- حـ هـ = ب هـ (معطى)
- ق(∠ أ هـ حـ) = ق(∠ ء هـ ب) (برهانًا)

$\therefore \Delta$ أ هـ حـ $\equiv \Delta$ ء هـ ب (وهو المطلوب)

حاول بنفسك 1



في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{ءحـ} = \{هـ\}$ ، $\overleftrightarrow{ءحـ} \parallel \overleftrightarrow{وم}$ ، و $\in \overleftrightarrow{أب}$

، ق(∠ م و ب) = ٤٠°

أكمل البرهان التالي لإيجاد : ق(∠ أ هـ حـ)

المعطيات | ....

المطلـوب | ....

البرهـــان | $\because \overleftrightarrow{حـء} \parallel$ .... (معطى) ، $\overleftrightarrow{أب}$ قاطع لهما

$\therefore$ ق(∠ ء هـ ب) = ق(∠ ....) = ٤٠° (بالتناظر)

، $\because \overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{حـء} = \{هـ\}$

$\therefore$ ق(∠ أ هـ حـ) = ق(∠ ....) (بالتقابل بالرأس)

$\therefore$ ق(∠ أ هـ حـ) = ...° (وهو المطلوب)

٢ مجموع قياسات الزوايا المتجاورة المتجمعة حول نقطة يساوى ٣٦٠°

المعطيات	$\overrightarrow{وأ}$ ، $\overrightarrow{وب}$ ، $\overrightarrow{وحـ}$ ، $\overrightarrow{وء}$ أشعة نقطة البداية لكل منها «و»
المطلوب	إثبات أن : مجموع قياسات الزوايا المتجاورة المتجمعة حول «و» يساوى ٣٦٠°
العمل	نرسم المستقيم $\overleftrightarrow{ءو}$ ، هـ $\in$ $\overleftrightarrow{ءو}$
البرهان	∵ ق (∠ء و أ) + ق (∠أ و ب) + ق (∠ب و هـ) = ١٨٠° ، ق (∠هـ و حـ) + ق (∠حـ و ء) = ١٨٠° ∴ ق (∠ء و أ) + ق (∠أ و ب) + [ق (∠ب و هـ) + ق (∠هـ و حـ)] + ق (∠حـ و ء) = ١٨٠° + ١٨٠° = ٣٦٠° ∴ ق (∠ء و أ) + ق (∠أ و ب) + ق (∠ب و حـ) + ق (∠حـ و ء) = ٣٦٠°

(وهو المطلوب)

مثال ٢

فى الشكل المقابل :

ق (∠ب أ حـ) = ٨٠° ، ق (∠ء حـ هـ) = ١٢٠°

، ق (∠أ حـ هـ) = ١٤٠° أثبت أن : $\overleftarrow{أب}$ // $\overleftarrow{حـء}$

الحل

المعطيات	ق (∠ب أ حـ) = ٨٠° ، ق (∠ء حـ هـ) = ١٢٠° ، ق (∠أ حـ هـ) = ١٤٠°
المطلوب	إثبات أن : $\overleftarrow{أب}$ // $\overleftarrow{حـء}$

البرهـــان ∵ ق (∠ ء حـ أ) + ق (∠ ء حـ هـ) + ق (∠ أ حـ هـ) = ٣٦٠° (زوايا متجمعة حول حـ)

∴ ق (∠ ء حـ أ) = ٣٦٠° − (١٢٠° + ١٤٠°) = ١٠٠°

∴ ق (∠ ب أ حـ) + ق (∠ ء حـ أ) = ٨٠° + ١٠٠° = ١٨٠°

وهما داخلتان وفى جهة واحدة من القاطع $\overleftrightarrow{أحـ}$

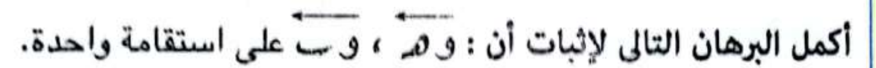
∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{حـء}$ **(وهو المطلوب)**

حاول بنفسك ٢

فى الشكل المقابل :

ق (∠ أ و ب) = ١٣٠° ، ق (∠ ب و حـ) = ٧٠°

، ق (∠ حـ و ء) = ٦٠° ، $\overrightarrow{وهـ}$ ينصف ∠ أ و ء



أكمل البرهان التالى لإثبات أن : $\overrightarrow{وهـ}$ ، $\overrightarrow{وب}$ على استقامة واحدة.

المعطيات ....

المطلـوب ....

البرهـــان ∵ ق (∠ أ و ب) + ق (∠ ب و حـ) + ق (∠ حـ و ء) + ق (∠ أ و ء) = ...°

(زوايا متجمعة حول و)

∴ ق (∠ أ و ء) = ...° − ....° = ...°

، ∵ $\overrightarrow{وهـ}$ ينصف ∠ .... (معطى)

∴ ق (∠ أ و هـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ....)

∴ ق (∠ أ و هـ) = $\frac{1}{2}$ × ....° = ...°

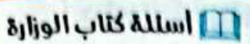
∴ ق (∠ أ و هـ) + ق (∠ أ و ب) = ...° + ...° = ...°

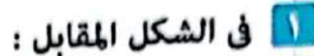
∴ $\overrightarrow{وهـ}$ ، $\overrightarrow{وب}$ على استقامة واحدة. **(وهو المطلوب)**




تمارين 1

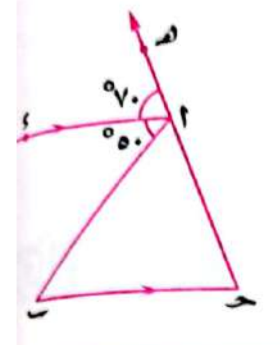
على البرهان الاستدلالى



● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

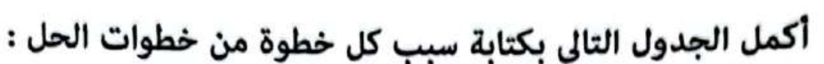
١ في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أء}$ // $\overline{ب حـ}$

، ق (∠ ء أ ب) = ٥٠° ، ق (∠ ء أ هـ) = ٧٠°

أوجد قياسات زوايا Δ أ ب حـ

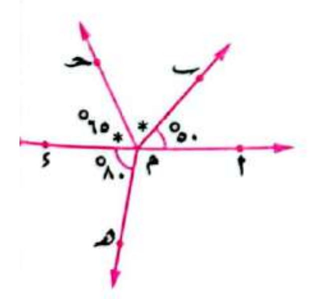


أكمل الجدول التالى بكتابة سبب كل خطوة من خطوات الحل :

الجملة الرياضية	السبب
ق (∠ ء أ ب) = ٥٠° ، ق (∠ ء أ هـ) = ٧٠°	١ ....
ق (∠ حـ أ ب) = ١٨٠° − (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°	٢ ....
$\overleftrightarrow{أء}$ // $\overline{ب حـ}$	٣ ....
ق (∠ حـ) = ق (∠ ء أ هـ) = ٧٠°	٤ ....
ق (∠ ب) = ق (∠ ء أ ب) = ٥٠°	٥ ....

---

٢ في الشكل المقابل :



ق (∠ أ م ب) = ٥٠° ، ق (∠ هـ م ء) = ٨٠°

، $\overrightarrow{م حـ}$ ينصف ∠ ب م ء ، ق (∠ حـ م ء) = ٦٥°

أكمل البرهان التالى لإيجاد : ق (∠ أ م هـ)

المعطيات | ....

المطلوب | ....

البرهان | ∵ $\overrightarrow{م حـ}$ ينصف ∠ .... (معطى)

∴ ق (∠ ب م حـ) = ق (∠ ....) = ...°

، ∵ ق (∠ أ م ب) + ق (∠ ب م حـ) + ق (∠ حـ م ء) + ق (∠ ء م هـ)

+ ق (∠ أ م هـ) = ...°

∴ ق (∠ أ م هـ) = ...° − ....° = ...° (وهو المطلوب)

٣ **فى الشكل المقابل :**



$\overleftrightarrow{\text{أحـ}} \cap \overleftrightarrow{\text{بء}}$ = {م}

، ق (∠ ب م حـ) = ١٢٠°

، $\overrightarrow{\text{م هـ}}$ ينصف ∠ أ م ء

أكمل خطوات الحل لإيجاد : ق (∠ هـ م حـ)

المعطيات | ....

المطلـوب | ....

البرهـان | ∵ $\overleftrightarrow{\text{أحـ}} \cap \overleftrightarrow{\text{بء}}$ = {م}

∴ ق (∠ ب م حـ) = ق (∠ ....) (بالتقابل بالرأس)

∴ ق (∠ ....) = ١٢٠°

، ∵ $\overrightarrow{\text{م هـ}}$ ينصف ∠ أ م ء

∴ ق (∠ ....) = ق (∠ ....)

∴ ق (∠ هـ م ء) = ...° ÷ .... = ...°

، ∵ م ∈ $\overleftrightarrow{\text{بء}}$

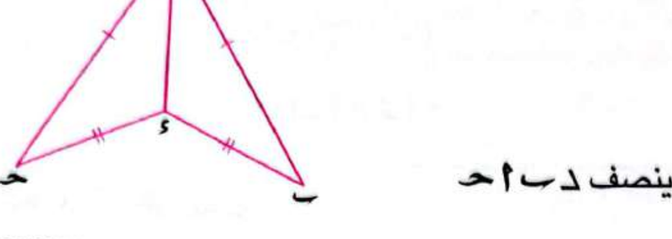
∴ ق (∠ ب م حـ) + ق (∠ ....) = ١٨٠°

∴ ق (∠ ء م حـ) = ...° − ....° = ...°

، ∵ ق (∠ هـ م حـ) = ق (∠ ....) + ق (∠ ....)

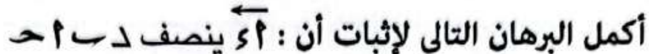
∴ ق (∠ هـ م حـ) = ...° + ...° = ...° (وهو المطلوب)

٤ **فى الشكل المقابل :**



أب = أحـ

، ب ء = حـ ء



أكمل البرهان التالى لإثبات أن : $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ حـ

المعطيات ....

المطلـوب ....

البرهـان ∵ ΔΔ أ ء ب ، .... فيهما :

أب = ... (معطى)

.... = حـ ء (معطى)

$\overline{أء}$ ....

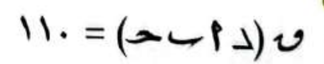
∴ Δ أ ء ب ≡ Δ ....

وينتج من تطابقهما أن : ق (∠ ....) = ق (∠ ....)

∴ $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ .... (وهو المطلوب)

---

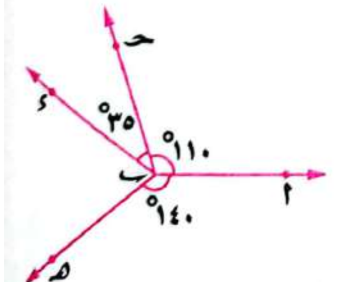
٥ 📖 **فى الشكل المقابل :**



ق (∠ أ ب حـ) = ١١٠°

، ق (∠ حـ ب ء) = ٣٥°

، ق (∠ أ ب هـ) = ١٤٠°



أوجد : ق (∠ هـ ب ء)

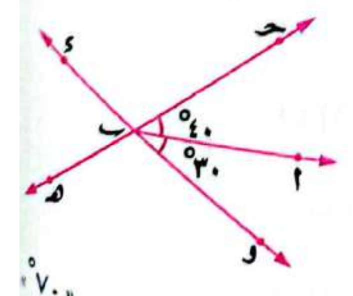
« ٧٥° »

---

٦ **فى الشكل المقابل :**

$\overleftrightarrow{حـ هـ}$ ∩ $\overleftrightarrow{ء و}$ = {ب}

، ق (∠ أ ب حـ) = ٤٠° ، ق (∠ أ ب و) = ٣٠°



أوجد : ق (∠ ء ب هـ)

« ٧٠° »

٧ في الشكل المقابل :

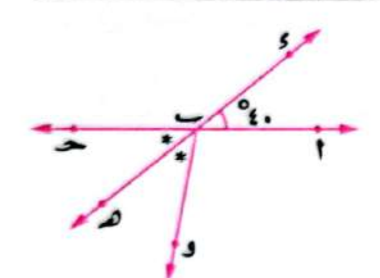
ب ∈ أحـ ، ق (∠ حـ ب هـ) = ١١٦°

، ب ء ينصف ∠ أ ب هـ

أوجد : ق (∠ أ ب ء) «٣٢°»

---

٨ في الشكل المقابل :



أحـ ∩ ء هـ = {ب} ، ق (∠ أ ب ء) = ٤٠°

، ب هـ ينصف ∠ حـ ب و

أوجد : ق (∠ أ ب و) «١٠٠°»

---

٩ في الشكل المقابل :

هـ أ ∩ هـ ب ∩ هـ حـ ∩ هـ ء = {هـ}

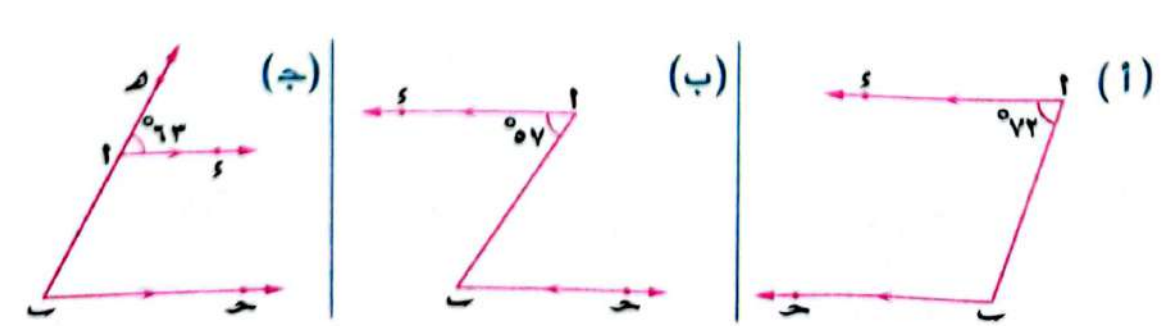
، إذا كان : ق (∠ ب هـ حـ) = ق (∠ أ هـ ء)

، ق (∠ أ هـ ب) = ٦٥° ، ق (∠ حـ هـ ء) = ٨٥°

أوجد : ق (∠ ب هـ حـ) ، هل أ ، هـ ، حـ على استقامة واحدة ؟ ولماذا ؟  «١٠٥°»

---

١٠ في كل من الأشكال الآتية إذا كان : أء // ب حـ فعين مع ذكر السبب : ق (∠ أ ب حـ)



١١ في الشكل المقابل :

أب // حـء

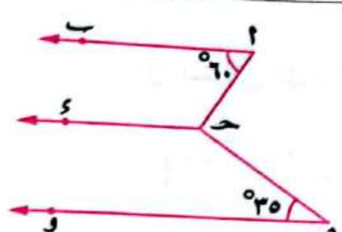
، ق(∠هـ أ حـ) = ١٣٠° ، ق(∠هـ أ ب) = ٩٠°

أوجد : ١ ق(∠ب أ حـ) ٢ ق(∠حـ)

«١٤٠° ، ٤٠°»

---

١٢ في الشكل المقابل :



أب // حـء ، أب // هـو

، ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠هـ) = ٣٥°

أوجد : ق(∠أ حـ هـ)

«٩٥°»

---

١٣ في الشكل المقابل :

ءهـ // ب حـ ، أ ∈ ءهـ

، ق(∠ء أ ب) = ٨٠° ، ق(∠هـ أ حـ) = ٥٠°

أوجد : قياسات زوايا △ أ ب حـ

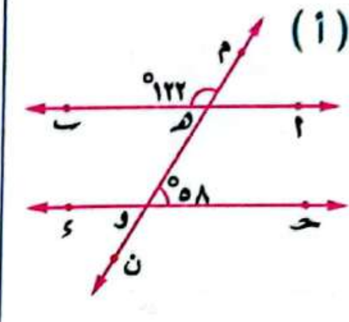
«ق(∠ب أ حـ) = ٥٠° ، ق(∠ب) = ٨٠° ، ق(∠حـ) = ٥٠°»

---

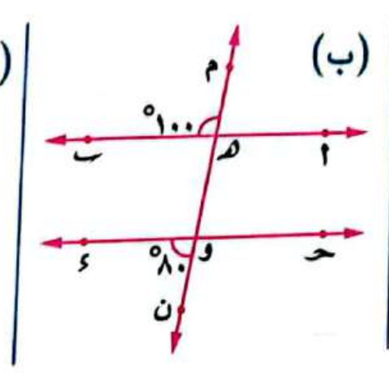
١٤ في كل من الأشكال الآتية إذا كان : م ن يقطع أب ، حـء في هـ ، و على الترتيب

أثبت أن : أب // حـء

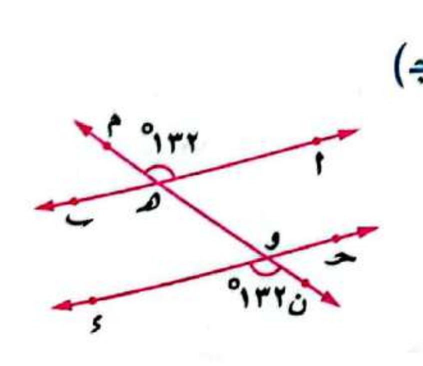
(أ)



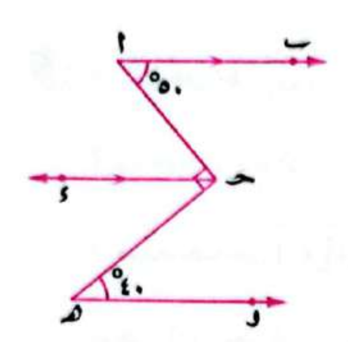
(ب)



(جـ)



١٥ 📖 **في الشكل المقابل :**



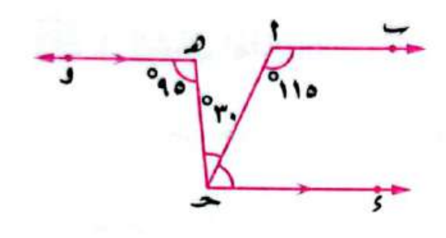
$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ، ق (∠ أ) = ٥٠°

، ∠ أ حـ هـ قائمة ، ق (∠ هـ) = ٤٠°

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

---

١٦ 📖 **في الشكل المقابل :**



$\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ، ق (∠ حـ هـ و) = ٩٥°

، ق (∠ أ حـ هـ) = ٣٠° ، ق (∠ ب أ حـ) = ١١٥°

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

---

١٧ **في الشكل المقابل :**

$\overline{\text{أ ء}}$ ∩ $\overline{\text{ب حـ}}$ = {م} ، م أ = م ء ، م ب = م حـ

أثبت أن :

[١] أ ب = حـ ء [٢] $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$



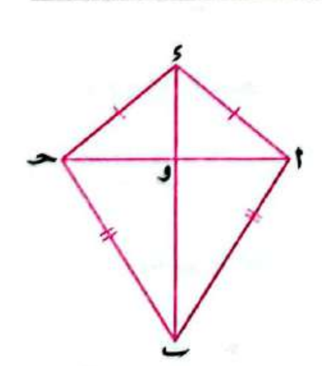
١٨ 📖 **أثبت أن :**

[١] المستقيم العمودى على أحد مستقيمين متوازيين فى المستوى يكون عموديًا على المستقيم الآخر.

[٢] إذا وازى مستقيمان مستقيمًا ثالثًا كان هذان المستقيمان متوازيين.

---

١٩ 📖 **في الشكل المقابل :**



أ ء = حـ ء ، أ ب = ب حـ

استخدم خاصية تطابق المثلثين فى إثبات أن :

[١] $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ ينصف ∠ أ ء حـ

[٢] $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ء ب}}$ متعامدان.

٢٠ في الشكل المقابل :

أ ب ح ء مربع فيه :

و منتصف $\overline{\text{حء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أو}} \cap \overleftrightarrow{\text{بح}} = \{\text{هـ}\}$

برهن أن : حهـ = حب

---

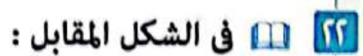
٢١ في الشكل المقابل :

أء = ب ح ، ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ ء ب ح) = ٩٠°

برهن أن :

[١] أ ب = ح ء

[٢] $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{حء}}$

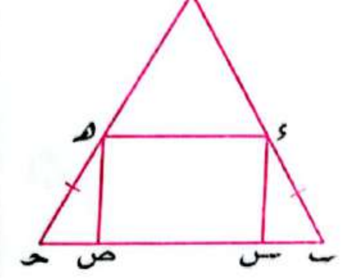


٢٢ في الشكل المقابل :

هـ ح = ء ب

، ء س ص هـ مستطيل

أثبت أن : ق (∠ أ ء هـ) = ق (∠ أ هـ ء)



---

٢٣ في الشكل المقابل :

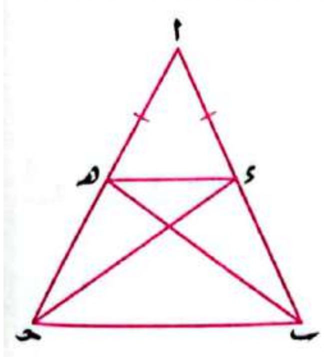
أء = أ هـ

، ق (∠ أ ء ح) = ق (∠ أ هـ ب)

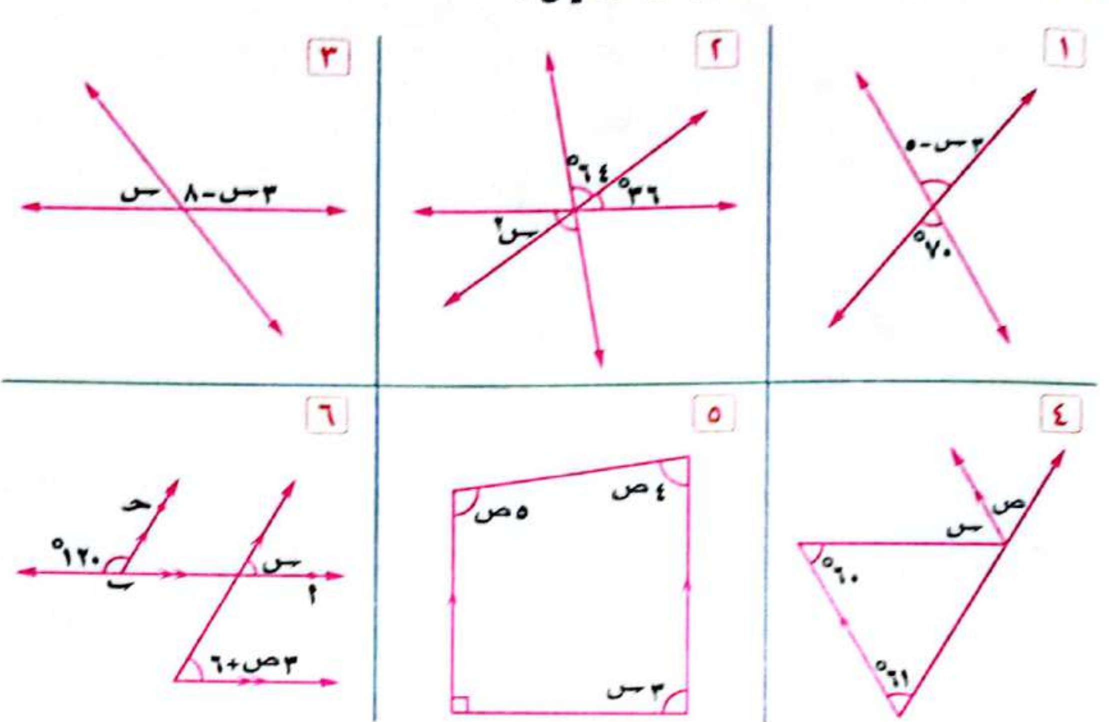
أثبت أن :

[١] ب هـ = ح ء

[٢] ب ء = ح هـ

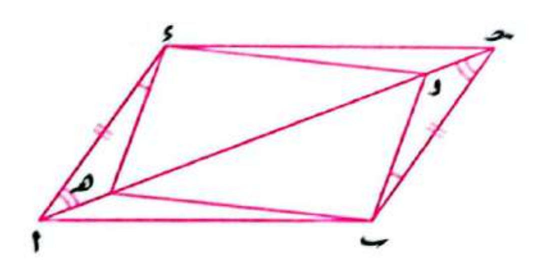


٢٤ احسب قيمة س ، ص فى كل مما يأتى :



للمتفوقين

٢٥ فى الشكل المقابل :



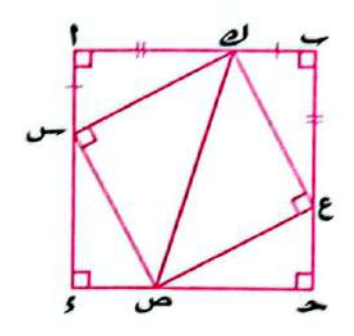
أولاً : هل Δ أ ء هـ يطابق Δ حـ ب و ؟ ولماذا ؟

ثانيًا : أثبت أن :

١ Δ ء هـ و ≡ Δ ب و هـ

٢ Δ أ ب هـ ≡ Δ حـ ء و

٢٦ فى الشكل المقابل :



أولاً : هل Δ س أ ل يطابق Δ ل ب ع ؟ ولماذا ؟

ثانيًا : أثبت أن :

١ Δ س ل ص ≡ Δ ع ل ص

٢ Δ س ء ص ≡ Δ ص حـ ع

الدرس 2

المضلــــــع

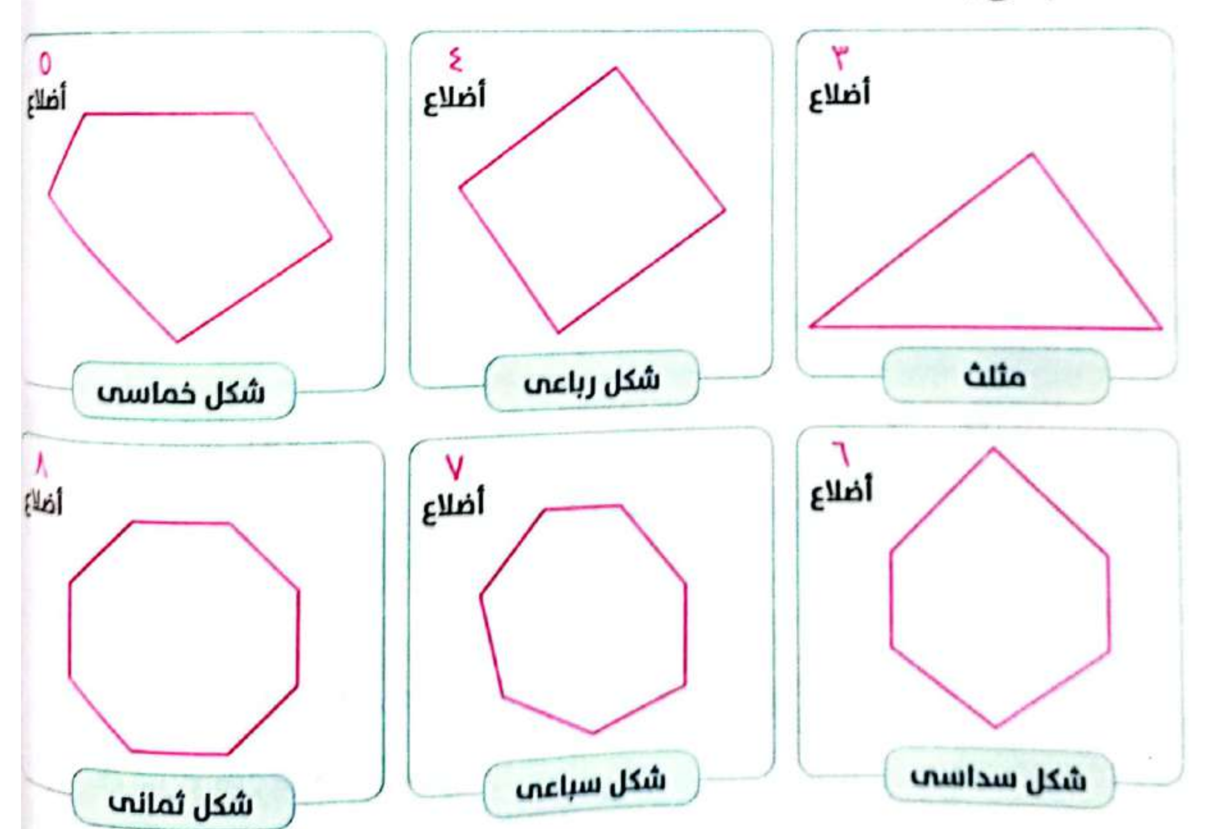
المضلع

هو خط بسيط مغلق يتكون من اتحاد ثلاث قطع مستقيمة أو أكثر ويُسمى المضلع بحسب عدد أضلاعه.

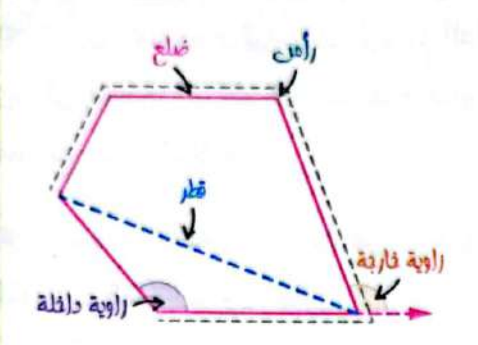
لاحظ أن:

الخط البسيط هو الخط الذى لا يقطع نفسه.

• أمثلة لبعض المضلعات :



ملاحظات



١ كل قطعة مستقيمة من القطع المكونة للمضلع تُسمى «**ضلعًا**».

٢ كل نقطة ناتجة عن تلاقى ضلعين متجاورين من أضلاع المضلع تُسمى «**رأسًا**».

٣ مجموع أطوال أضلاع المضلع يُسمى «محيط المضلع».

٤ كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين فى المضلع تُسمى «**قطرًا**».

٥ الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين فى المضلع تسمى «**زاوية داخلة**».

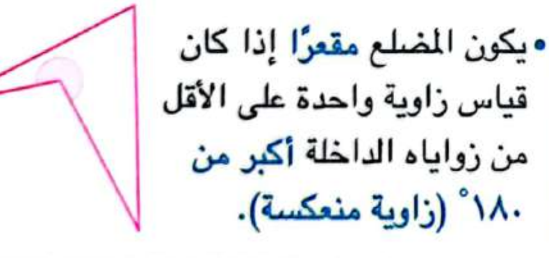
٦ الزاوية المحصورة بين أحد أضلاع المضلع وامتداد الضلع المجاور له تسمى «**زاوية خارجة**».

٧ عدد أضلاع أى مضلع = عدد رءوسه = عدد زواياه الداخلة.

المضلع المحدب والمضلع المقعر

• يكون المضلع **محدبًا** إذا كان قياس أى زاوية من زواياه الداخلة **أقل من ١٨٠°**

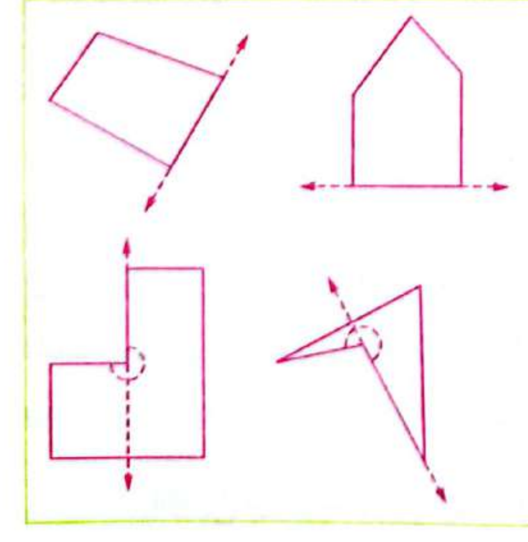
• يكون المضلع **مقعرًا** إذا كان قياس زاوية واحدة على الأقل من زواياه الداخلة **أكبر من ١٨٠° (زاوية منعكسة)**.



ملاحظة

• **فى المضلع المحدب** : إذا رُسم مستقيم يمر بأى رأسين متتاليين فإن باقى رءوسه تقع فى جهة واحدة من هذا المستقيم.

• **فى المضلع المقعر** : توجد مستقيمات تمر برأسين متتاليين وتكون باقى رءوسه واقعة فى جهتين مختلفتين من هذه المستقيمات.



مجموع قياسات الزوايا الداخلة لأى مضلع

نعلم أن : مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠°

ويمكن استخدام ذلك فى استنتاج قانون عام لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخلة لأى مضلع عدد أضلاعه ن

فإذا رسمنا الأقطار الخارجة من أحد رءوس مضلع فإن سطح هذا المضلع ينقسم إلى عدد من المثلثات كما بالجدول التالى :

المضلع	عدد أضلاعه	عدد المثلثات الناتجة	مجموع قياسات زواياه الداخلة
١ ، ٢	٤	٢	٢ × ١٨٠° = ٣٦٠°
١ ، ٢ ، ٣	٥	٣	٣ × ١٨٠° = ٥٤٠°
١ ، ٢ ، ٣ ، ٤	٦	٤	٤ × ١٨٠° = ٧٢٠°
١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥	٧	٥	٥ × ١٨٠° = ٩٠٠°

مما سبق لاحظ أن : عدد المثلثات الناتجة = عدد أضلاع المضلع – ٢

وبصفة عامة :

إذا رسمنا جميع الأقطار الخارجة من أحد رءوس مضلع عدد أضلاعه ن ضلعًا فإن سطح هذا المضلع ينقسم إلى عدد من المثلثات يساوى (ن – ٢) مثلثًا .

وحيث إن مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ن يساوى (ن – ٢) × ١٨٠°

فمثلاً : • مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الثمانى = (٨ - ٢) × ١٨٠° = ١٠٨٠°

• مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل التساعى = (٩ - ٢) × ١٨٠° = ١٢٦٠°

مثال ١

أكمل الجدول التالى :

عدد أضلاع المضلع	١٠	٣	١٢	١٥
مجموع قياسات زواياه الداخلة	....	....	....	....

الحـــل

عدد أضلاع المضلع	١٠	٣	١٢	١٥
مجموع قياسات زواياه الداخلة	٨ × ١٨٠° = ١٤٤٠°	١ × ١٨٠° = ١٨٠°	١٠ × ١٨٠° = ١٨٠٠°	١٣ × ١٨٠° = ٢٣٤٠°

مثال ٢

إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع يساوى ٢١٦٠° أوجد عدد أضلاعه.

الحـــل

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ن يساوى (ن - ٢) × ١٨٠°

∴ ٢١٦٠° = (ن - ٢) × ١٨٠° ∴ ن - ٢ = $\frac{٢١٦٠}{١٨٠}$ = ١٢ ∴ ن = ١٤

∴ عدد أضلاع هذا المضلع يساوى ١٤ ضلعًا.

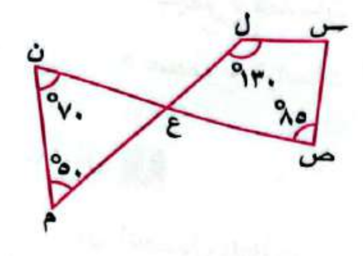
الإجابات النهائية لأسئلة حاول بنفسك تجدها نهاية كل درس للتأكد من إجابتك.



أكمل الجدول التالى :

عدد أضلاع المضلع	١١	....	١٦	....
مجموع قياسات زواياه الداخلة	....	٩٠٠°	....	٥٤٠°

مثال ٣



في الشكل المقابل :

$\overline{ل م} \cap \overline{ص ن} = \{ع\}$ ، ق (∠ م) = ٥٠° ، ق (∠ ن) = ٧٠°

، ق (∠ ص) = ٨٥° ، ق (∠ ل) = ١٣٠°

أوجد : ق (∠ س)

الحل

المعطيات	ق (∠ م) = ٥٠° ، ق (∠ ن) = ٧٠° ، ق (∠ ص) = ٨٥° ، ق (∠ ل) = ١٣٠°
المطلوب	إيجاد : ق (∠ س)
البرهان	في Δ ع م ن : ∵ ق (∠ م) = ٥٠° ، ق (∠ ن) = ٧٠°

∴ ق (∠ ن ع م) = ١٨٠° − (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°

، ∵ ق (∠ ل ع ص) = ق (∠ ن ع م) (بالتقابل بالرأس)

∴ ق (∠ ل ع ص) = ٦٠°

∵ الشكل س ص ع ل شكل رباعي

∴ مجموع قياسات زواياه الداخلة = (٤ − ٢) × ١٨٠° = ٢ × ١٨٠° = ٣٦٠°

∴ ق (∠ س) = ٣٦٠° − (١٣٠° + ٨٥° + ٦٠°) = ٨٥° (وهو المطلوب)

مثال ٤

إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة لشكل رباعي كنسبة ٢ : ٣ : ٣ : ٤

فأوجد أصغر قياس من قياسات زوايا هذا الشكل الرباعي.

الحل

∵ النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة لشكل رباعي = ٢ : ٣ : ٣ : ٤

∴ قياسات الزوايا الداخلة لهذا الشكل هي : ٢ س ، ٣ س ، ٣ س ، ٤ س

، ∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = (٤ − ٢) × ١٨٠° = ٢ × ١٨٠° = ٣٦٠°

∴ ٢ س + ٣ س + ٣ س + ٤ س = ٣٦٠° ∴ ١٢ س = ٣٦٠°

∴ س = $\frac{٣٦٠°}{١٢}$ = ٣٠°

، ∵ أصغر قياس هو ٢ س ∴ أصغر قياس = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

حاول بنفسك ٢

فى الشكل المقابل :

أهـ // بـحـ ، ق (∠ب) = ٧٠°

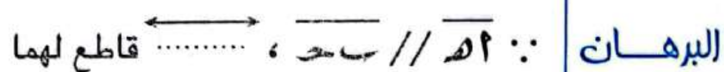
، ق (∠حـ) = ١٥٠° ، ق (∠ء) = ٨٠°

أكمل البرهان التالى لإيجاد : ق (∠هـ)

المعطيات ....

المطلوب ....

البرهان



∵ أهـ // بـحـ ، .... قاطع لهما

∴ ق (∠أ) + ق (∠ ....) = ١٨٠° (داخلتان وفى جهة واحدة من القاطع)

، ∵ ق (∠ ....) = ٧٠°

∴ ق (∠أ) = ...° − ٧٠° = ...°

، ∵ أبحـءهـ مضلع خماسى.

∴ مجموع قياسات زواياه الداخلة = (٥ − ....) × ....°

= ....°

∴ ق (∠هـ) = ...° − (٧٠° + ١٥٠° + ٨٠° + ١١٠°)

= ....° (وهو المطلوب)

مجموع قياسات الزوايا الخارجة لمضلع محدب عدد أضلاعه ن

• سبق أن ذكرنا أن الزاوية الخارجة لمضلع هى الزاوية المحصورة بين أحد أضلاع المضلع وامتداد الضلع المجاور له وبالرغم أنه من الممكن رسم زاويتين خارجتين متساويتين فى القياس عند كل رأس من رءوس المضلع إلا أن قاعدة مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع تستخدم زاوية خارجة واحدة فقط كما بالشكل المقابل.

زاوية خارجة

• عند أى رأس من رءوس مضلع نجد أن : مجموع قياسى الزاويتين الداخلة والخارجة يساوى ١٨٠°

ففى الشكل المقابل : ق (∠ ١) + ق (∠ ٢) = ١٨٠°

وعلى سبيل المثال فى الشكل الخماسى السابق :

مجموع قياسات الزوايا الداخلة الخمسة والزوايا الخارجة الخمسة يساوى ٥ × ١٨٠°

وحيث إن مجموع قياسات الزوايا الداخلة فقط يساوى ٣ × ١٨٠°

∴ مجموع قياسات الزوايا الخارجة الخمسة يساوى ٢ × ١٨٠° = ٣٦٠°

ويمكن استنتاج ذلك بالنسبة لأى مضلع محدب عدد أضلاعه ن كالتالى :

مجموع قياسات الزوايا الخارجة + مجموع قياسات الزوايا الداخلة = ن × ١٨٠°

∴ مجموع قياسات الزوايا الخارجة + (ن − ٢) × ١٨٠° = ن × ١٨٠°

∴ مجموع قياسات الزوايا الخارجة = ن × ١٨٠° − [(ن − ٢) × ١٨٠°]

= ١٨٠° ن − ١٨٠° ن + ٣٦٠° = ٣٦٠°

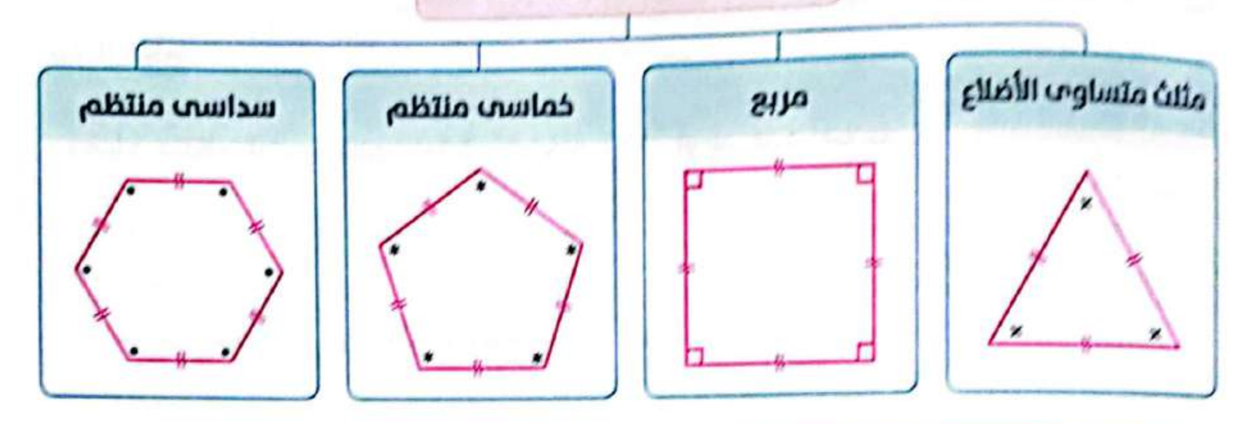
وعلى هذا فإن : مجموع قياسات الزوايا الخارجة لمضلع محدب عدد أضلاعه ن = ٣٦٠°
«باعتبار زاوية خارجة واحدة عند كل رأس»

المضلع المنتظم

يسمى المضلع مضلعًا منتظمًا إذا كانت :

1. جميع أضلاعه متساوية الطول.
2. جميع زواياه متساوية القياس.

ومن أمثلة المضلعات المنتظمة :



قياس الزاوية الداخلة للمضلع المنتظم

رأينا أن مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع الذى عدد أضلاعه ن = (ن − ٢) × ١٨٠°

فإذا كان المضلع منتظمًا فإن زواياه الداخلة التى عددها ن تكون متساوية فى القياس.

∴ قياس كل زاوية داخلة من زوايا مضلع منتظم عدد أضلاعه ن يساوى $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠^\circ}{ن}$

فمثلًا : • المثلث المتساوى الأضلاع قياس كل زاوية من زواياه الداخلة = $\frac{(٣ - ٢) \times ١٨٠^\circ}{٣} = ٦٠^\circ$

• المربع قياس كل زاوية من زواياه الداخلة = $\frac{(٤ - ٢) \times ١٨٠^\circ}{٤} = ٩٠^\circ$

مثال ٥

أكمل الجدول التالى :

عدد أضلاع مضلع منتظم	٥	٨	١٢	٦
قياس إحدى زواياه الداخلة	....	....	....	....

الحـــل

عدد أضلاع مضلع منتظم	٥	٨	١٢	٦
قياس إحدى زواياه الداخلة	$\frac{٣ \times ١٨٠^\circ}{٥}$ $= ١٠٨^\circ$	$\frac{٦ \times ١٨٠^\circ}{٨}$ $= ١٣٥^\circ$	$\frac{١٠ \times ١٨٠^\circ}{١٢}$ $= ١٥٠^\circ$	$\frac{٤ \times ١٨٠^\circ}{٦}$ $= ١٢٠^\circ$

مثال ٦

مضلع منتظم قياس إحدى زواياه الداخلة ١٤٤° أوجد عدد أضلاعه.

الحـــل

∵ قياس كل زاوية من زوايا مضلع منتظم عدد أضلاعه ن = $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠^\circ}{ن}$

∴ $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠^\circ}{ن} = ١٤٤^\circ$ ∴ $(ن - ٢) \times ١٨٠^\circ = ١٤٤^\circ ن$

∴ $١٨٠^\circ ن - ٣٦٠^\circ = ١٤٤^\circ ن$ ∴ $١٨٠^\circ ن - ١٤٤^\circ ن = ٣٦٠^\circ$

∴ $٣٦^\circ ن = ٣٦٠^\circ$ ∴ $ن = ١٠$

∴ عدد الأضلاع = ١٠ أضلاع.

<u>حل آخر :</u>

∵ قياس الزاوية الخارجة = ١٨٠° − قياس الزاوية الداخلة.

$= ١٨٠^\circ - ١٤٤^\circ = ٣٦^\circ$

، ∵ مجموع قياسات الزوايا الخارجة = ٣٦٠°

∴ عدد الزوايا الخارجة = $\frac{٣٦٠^\circ}{٣٦^\circ}$ = ١٠ زوايا.

∴ عدد الأضلاع = ١٠ أضلاع.

لاحظ أن :

عدد أضلاع المضلع = عدد رءوسه

= عدد زواياه الداخلة

= عدد زواياه الخارجة

ملاحظـة

عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الداخلة س° يساوى $\frac{360°}{180° - س°}$

فمثلًا : عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الداخلة ١٤٤° = $\frac{360°}{180° - 144°}$ = ١٠ أضلاع

حاول بنفسك ٣

أكمل الجدول التالى :

عدد أضلاع مضلع منتظم	٣	١٠	....	....
قياس إحدى زواياه الداخلة	............°	............°	١٣٥°	١٦٠°

فى نهاية كل درس

ستجد الإجابات النهائية لأسئلة حاول بنفسك بنفس هذا الشكل

تمارين 2





• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

- ١ المضلع المنتظم هو مضلع فيه : (أ) .... (ب) ....
- ٢ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ...°
- ٣ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الخماسى = ...°
- ٤ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل السداسى = ...°
- ٥ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل السباعى = ...°
- ٦ قياس الزاوية الداخلة للخماسى المنتظم = ...°
  ، وقياس الزاوية الداخلة للسباعى المنتظم = ...°
- ٧ مجموع قياسات الزوايا الخارجة للشكل السداسى = ...°
- ٨ إذا كان محيط سداسى منتظم ٣٠ سم فإن طول ضلعه = ... سم
  ، وقياس كل زاوية من زواياه الداخلة = ...°
- ٩ إذا كان محيط مضلع منتظم ٨٠ سم وطول ضلعه ١٠ سم
  فإن قياس كل زاوية من زواياه الداخلة = ...°

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ١ مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ن يساوى ....

  (أ) $ن \times ١٨٠°$ (ب) $(ن - ٢) \times ١٨٠°$

  (جـ) $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠°}{ن}$ (د) $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠°}{٢ ن}$

- ٢ قياس الزاوية الداخلة للمضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن يساوى ....

  (أ) $\frac{(ن - ٢) \times ٩٠°}{ن}$ (ب) $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠°}{٢}$

  (جـ) $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠°}{ن}$ (د) $١٨٠° \times (ن - ١)$

[٣] قياس الزاوية الداخلة للمضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ١٠ أضلاع يساوى ....

(أ) ٧٢° (ب) ١٠٨° (جـ) ١٤٤° (د) ١٥٠°

[٤] قياس الزاوية الداخلة للمضلع الثمانى عشر المنتظم يساوى ....

(أ) ١٣٠° (ب) ١٤٠° (جـ) ١٥٠° (د) ١٦٠°

[٥] إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلة لمضلع منتظم ١٣٥° فإن عدد أضلاعه يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ٨

[٦] مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمثلث يساوى ....

(أ) ٩٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ٣٦٠° (د) ٧٢٠°

[٧] فى الشكل الرباعى أ ب جـ د إذا كان : ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب) = ق (∠ جـ) = ٩٦°

فإن : ق (∠ د) = ...

(أ) ٩٦° (ب) ٤٨° (جـ) ١٢٠° (د) ١٤٤°

---

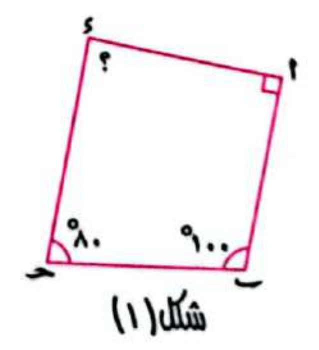
[٣] أوجد عدد أقطار كل من الأشكال التالية :

[١] المثلث. [٢] الشكل الرباعى. [٣] الشكل الخماسى.

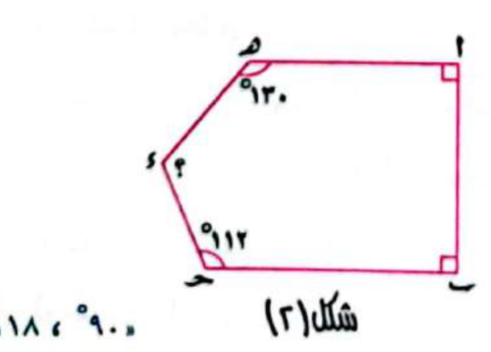
(إرشاد : عدد أقطار مضلع عدد أضلاعه ن = $\frac{ن (ن - ٣)}{٢}$)

---

[٤] فى كل مما يأتى أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالعلامة (؟) :



شكل(١)



شكل(٢)

«٩٠°، ١١٨°»

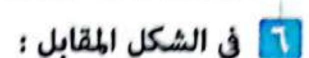
٥ في الشكل المقابل :

و ∈ $\overleftarrow{\text{ص ع}}$ ، ق(∠ل) = ٧٠°

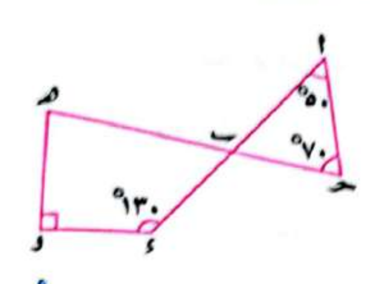
، ق(∠ص) = ٩٠° ، ق(∠ل ع و) = ١٢٠°

أوجد : ق(∠س)

«١٤٠°»



٦ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{حـ هـ}}$ ∩ $\overline{\text{أ ء}}$ = {ب}

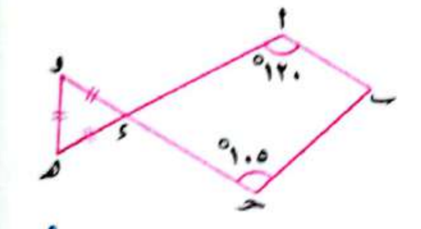
، ق(∠أ) = ٥٠° ، ق(∠حـ) = ٧٠°

، ق(∠ء) = ١٣٠° ، ق(∠و) = ٩٠°

أوجد : ق(∠هـ)

«٨٠°»

٧ في الشكل المقابل :



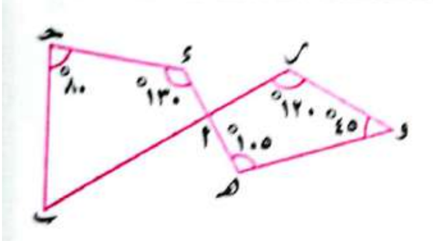
$\overline{\text{أ هـ}}$ ∩ $\overline{\text{حـ و}}$ = {ء} ، ء هـ و مثلث متساوى الأضلاع

، ق(∠أ) = ١٢٠° ، ق(∠حـ) = ١٠٥°

أوجد : ق(∠ب)

«٧٥°»

٨ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{هـ ء}}$ ∩ $\overline{\text{س ب}}$ = {أ} ، ق(∠و) = ٤٥°

، ق(∠س) = ١٢٠° ، ق(∠هـ) = ١٠٥°

، ق(∠ء) = ١٣٠° ، ق(∠حـ) = ٨٠°

أوجد : ق(∠ب)

«٦٠°»

٩ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{ب ء}}$ ∩ $\overline{\text{أ و}}$ = {حـ} ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{هـ ء}}$

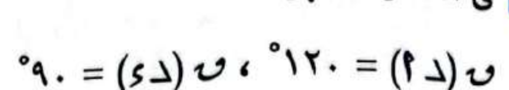
، ق(∠أ) = ٣٠° ، ق(∠أ حـ ب) = ٥٨°

، ق(∠حـ و هـ) = ١٢٥°

أوجد : ق(∠هـ)

«٨٥°»

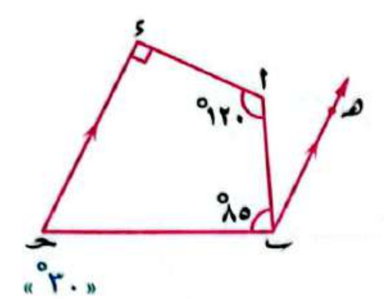
١٠ في الشكل المقابل :



ق(∠أ) = ١٢٠° ، ق(∠د) = ٩٠°

، ق(∠أ ب ﺟ) = ٨٥° ، ب هـ ∕∕ ﺟ د

أوجد : ق(∠أ ب هـ)



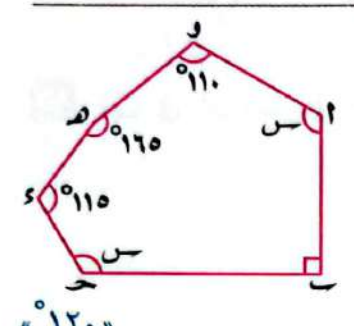
«٣٠°»

١١ في الشكل المقابل :

أ ب ﺟ د هـ و شكل سداسى

، ق(∠و أ ب) = ق(∠د ﺟ ب)

أوجد قيمة : س



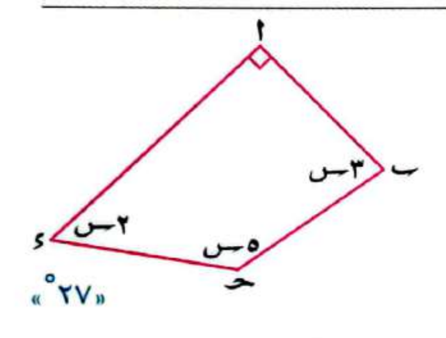
«١٢٠°»

١٢ في الشكل المقابل :

أ ب ﺟ د شكل رباعى فيه :

ق(∠أ) = ٩٠°

أوجد قيمة : س



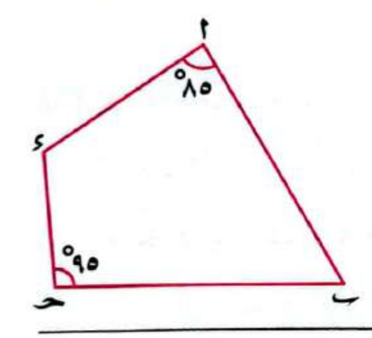
«٢٧°»

١٣ في الشكل المقابل :

ق(∠أ) = ٨٥° ، ق(∠ﺟ) = ٩٥°

، ق(∠ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠د)

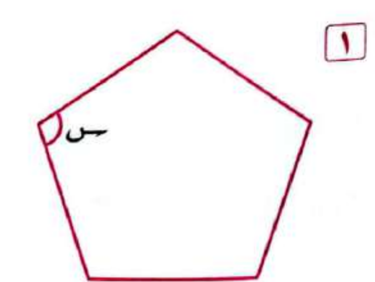
أوجد قياس كل منهما.



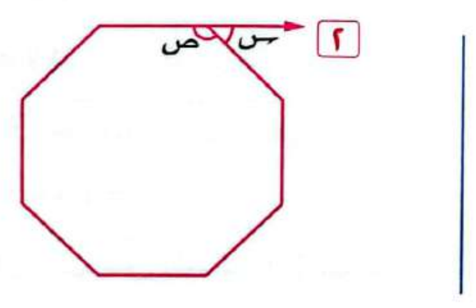
«٦٠° ، ١٢٠°»

١٤ في كل مما يأتى إذا كان المضلع منتظمًا فأوجد قياسات الزوايا المجهولة :

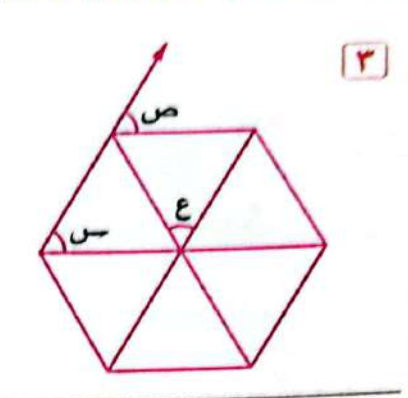
١



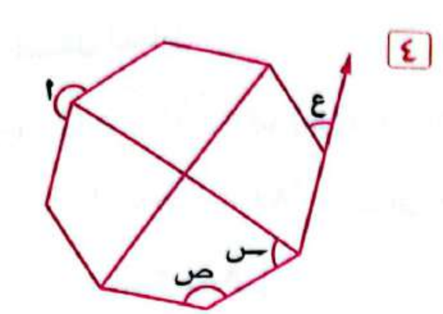
٢



[٣]

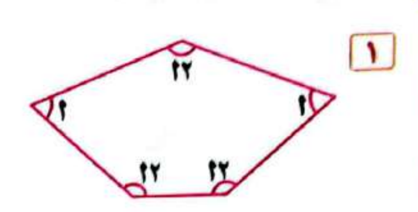


[٤]

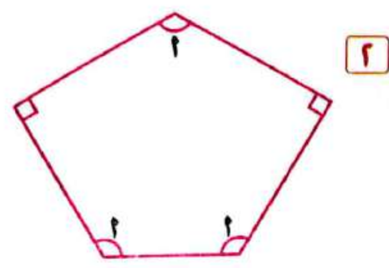
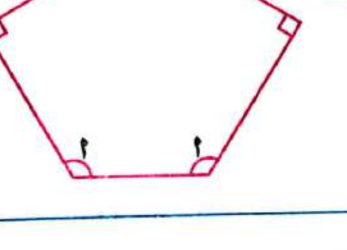


١٥ في كل مما يأتي أوجد قياسات الزوايا المجهولة :

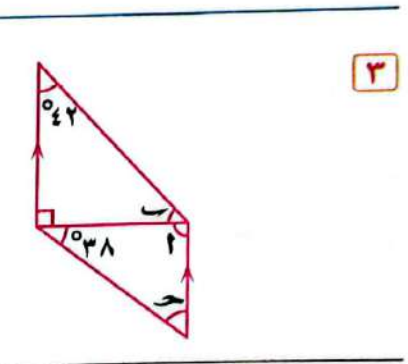
[١]



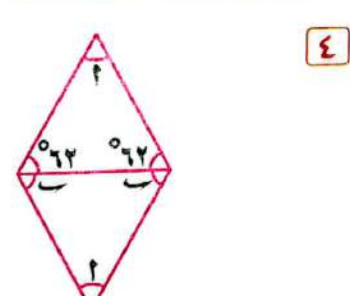
[٢]

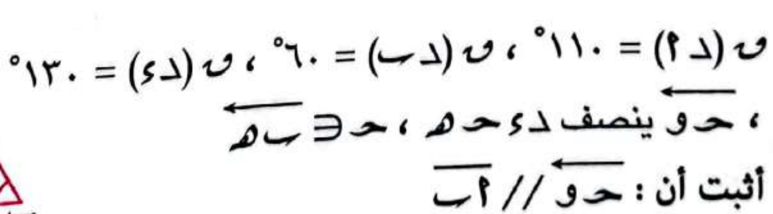
[٣]



[٤]



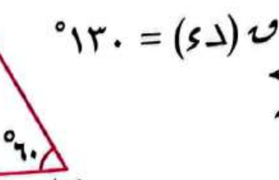
١٦ في الشكل المقابل :



ق (∠ أ) = ١١٠° ، ق (∠ ب) = ٦٠° ، ق (∠ ء) = ١٣٠°

، حـ و ينصف ∠ ء حـ هـ ، حـ ∈ ب هـ

أثبت أن : حـ و // أ ب



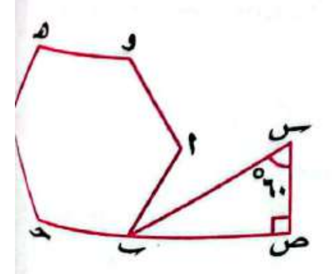
١٧ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم

، ص ∈ حـ ب ، س ص ⊥ ص ب

، ق (∠ س) = ٦٠°

أثبت أن : ب س ينصف ∠ أ ب ص



١٨ إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة لشكل خماسى هى ٣ : ٣ : ٢ : ٣ : ٤

أوجد أكبر قياس زاوية من الزوايا الداخلة لهذا الشكل الخماسى. «١٤٤°»

---

١٩ إذا كان قياس الزاوية الخارجة لمضلع منتظم يساوى ٣٠°

ما عدد أضلاع هذا المضلع ؟ وما مجموع قياسات زواياه الداخلة ؟ «١٢ ، ١٨٠٠°»

---

٢٠ هل يمكن لزاوية قياسها ١٠٠° أن تكون زاوية داخلة لمضلع منتظم ؟ ولماذا ؟

---

٢١ مضلع له تسعة أضلاع ومجموع قياسات ثمان من زواياه هو ١١٤٠° :

١ أوجد قياس الزاوية الباقية. «١٢٠°»

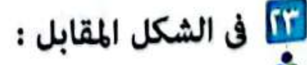
٢ هل يمكن أن يكون هذا المضلع منتظمًا ؟ وضح إجابتك.

---

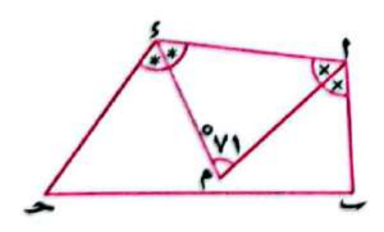
٢٢ عدد أضلاع مضلع ١٥ ضلعًا :

١ أوجد مجموع قياسات زواياه الداخلة.

٢ إذا كان مجموع قياسات خمسة من زواياه الخارجة يساوى ٢٠٠° أوجد مجموع قياسات الزوايا العشرة الداخلة غير المجاورة للزوايا الخمسة الخارجة. «٢٣٤٠° ، ١٦٤٠°»



٢٣ في الشكل المقابل :

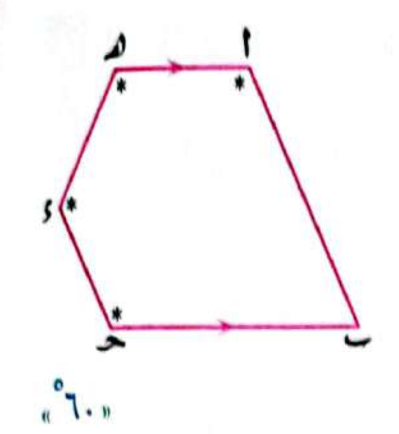


أم ينصف ∠ ب أ ء ، ءم ينصف ∠ أ ء حـ

، ق (∠ أ م ء) = ٧١°

أثبت أن : ق (∠ ب) + ق (∠ حـ) = ١٤٢°

١٤ في الشكل المقابل :



أهـ // ب حـ

، ق (∠ أ) = ق (∠ هـ) = ق (∠ ء) = ق (∠ حـ)

أوجد : ق (∠ ب)



الدرس 3

متوازى الأضــلاع وخواصه



* درست فى المرحلة الابتدائية متوازى الأضلاع وخواصه.

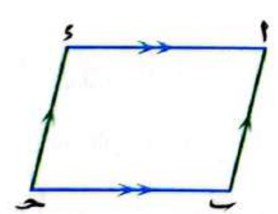
وفى هذا الدرس ستتذكر أولاً ما قمت بدراسته عن متوازى الأضلاع ، ثم ستدرس متى يكون الشكل الرباعى متوازى أضلاع.

تعريف

متوازى الأضلاع هو شكل رباعى فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان.

فمثلاً :

فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب حـ ء شكل رباعى فيه :

$\overline{أ ب} // \overline{ء حـ}$ ، $\overline{أ ء} // \overline{ب حـ}$

فإن الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

خواص متوازى الأضلاع

١ كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول		• أب = ءحـ • أء = بحـ
٢ كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس		• ق (∠أ) = ق (∠حـ) • ق (∠ب) = ق (∠ء)
٣ مجموع قياسى أى زاويتين متتاليتين يساوى ١٨٠°		• ق (∠أ) + ق (∠ب) = ١٨٠° • ق (∠ب) + ق (∠حـ) = ١٨٠° • ق (∠حـ) + ق (∠ء) = ١٨٠° • ق (∠ء) + ق (∠أ) = ١٨٠°
٤ القطران ينصف كل منهما الآخر		• أم = حـم • بم = ءم

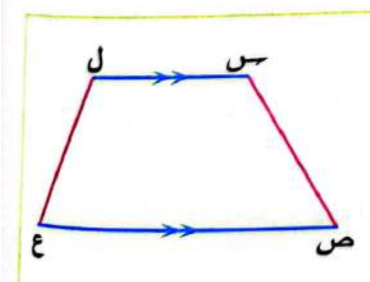
محيط متوازى الأضلاع = مجموع طولى أى ضلعين متجاورين فيه × ٢

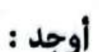
! ملاحظة

الشكل الرباعى الذى فيه ضلعان فقط متوازيان

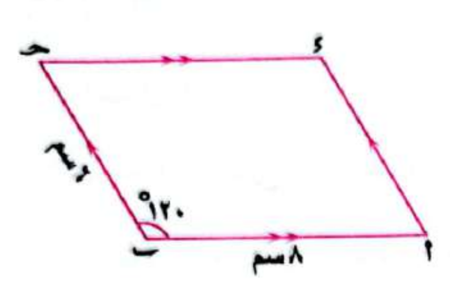
يُسمى شبه منحرف كما بالشكل المقابل الذى فيه :

$\overline{\text{سل}}$ // $\overline{\text{صع}}$





مثال ١



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٨ سم

، ب حـ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠°

أوجد :

١ طول كل من : $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$

٢ قياس كل من : ∠ ء ، ∠ أ ، ∠ حـ

٣ محيط متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

الحــل

المعطيات | أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠°

المطلوب | إيجاد : ١ حـ ء ، ء أ ٢ ق (∠ ء) ، ق (∠ أ) ، ق (∠ حـ)

٣ محيط متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

البرهان | ∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

∴ حـ ء = أ ب = ٨ سم (خواص متوازى الأضلاع)

، ء أ = حـ ب = ٦ سم (خواص متوازى الأضلاع) **(المطلوب أولاً)**

، ق (∠ ء) = ق (∠ ب) = ١٢٠° (خواص متوازى الأضلاع)

، ∵ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ١٨٠° (خواص متوازى الأضلاع)

، ق (∠ ب) = ١٢٠°

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

، ق (∠ حـ) = ق (∠ أ) = ٦٠° **(المطلوب ثانيًا)**

، محيط متوازى الأضلاع أ ب حـ ء = (أ ب + ب حـ) × ٢ = (٨ + ٦) × ٢

= ١٤ × ٢ = ٢٨ سم **(المطلوب ثالثًا)**

مثال ٢

في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م

فإذا كان : ب حـ = ٤ سم ، ب م = ٢ سم ، م حـ = ٣ سم

أوجد : محيط Δ أ م ء

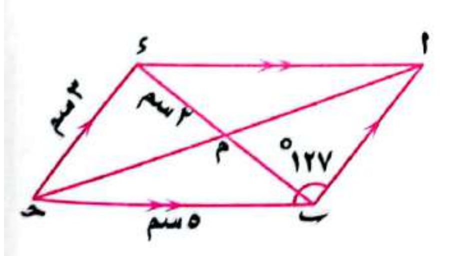


الحـــل

المعطيات	أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، ب حـ = ٤ سم ، ب م = ٢ سم ، م حـ = ٣ سم
المطلـوب	إيجاد : محيط Δ أ م ء
البرهـــان	∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع ∴ أ ء = ب حـ = ٤ سم (ضلعان متقابلان فى متوازى الأضلاع) ، ∵ القطران ينصف كل منهما الآخر ∴ م ء = ب م = ٢ سم ، أ م = م حـ = ٣ سم ∴ محيط Δ أ م ء = أ ء + م ء + أ م = ٤ + ٢ + ٣ = ٩ سم (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ١

في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م

فإذا كان : ب حـ = ٥ سم ، ء حـ = ٣ سم

، ء م = ٢ سم ، ق (∠ أ ب حـ) = ١٢٧° أكمل ما يأتى :

١ أ ب = ... سم ، أ ء = ... سم

٢ ب ء = ... سم

٣ ق (∠ أ ء حـ) = ...° ، ق (∠ ب أ ء) = ...° ، ق (∠ ب حـ ء) = ...°

٤ محيط متوازى الأضلاع أ ب حـ ء = ... سم

متى يكون الشكل الرباعى متوازى أضلاع ؟



مثال ٣

فى الشكل المقابل :

أ ب ح ء متوازى أضلاع

، ه ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ بحيث أ ب = ب ه

أثبت أن : ب ه ح ء متوازى أضلاع.



الحل

المعطيات | أ ب ح ء متوازى أضلاع ، أ ب = ب ه

المطلوب | إثبات أن : ب ه ح ء متوازى أضلاع.

البرهان | ∵ أ ب ح ء متوازى أضلاع ∴ أ ب = ء ح

، ∵ أ ب = ب ه (معطى) ∴ ء ح = ب ه (١)

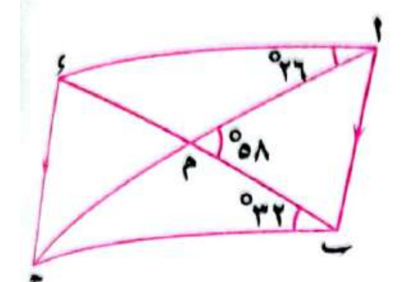
، ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء ح}}$ ، ه ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∴ $\overline{\text{ب ه}}$ // $\overline{\text{ء ح}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ء ح = ب ه ، $\overline{\text{ء ح}}$ // $\overline{\text{ب ه}}$

∴ ب ه ح ء متوازى أضلاع. (وهو المطلوب)



في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعي تقاطع قطراه في م

، $\overline{أ ب}$ // $\overline{حـ ء}$ ، ق (∠ أ م ب) = ٥٨°

، ق (∠ م ب حـ) = ٣٢° ، ق (∠ م أ ء) = ٢٦°

أكمل البرهان التالي لإثبات أن : الشكل أ ب حـ ء متوازي أضلاع.

المعطيات ....

المطلوب ....

البرهان ∵ م ∈ $\overline{أ حـ}$

∴ ق (∠ ب م حـ) = ١٨٠° − ....° = ...°

∴ في Δ ب م حـ :

ق (∠ م حـ ب) = ١٨٠° − (..............° + ...°) = ...°

∴ ق (∠ م حـ ب) = ق (∠ ....) وهما في وضع ....

∴ $\overline{..............}$ // $\overline{..............}$

، ∵ $\overline{..............}$ // $\overline{..............}$ (معطى)

∴ الشكل أ ب حـ ء متوازي أضلاع.

(وهو المطلوب)

تمارين 3

على متوازى الأضلاع وخواصه



اختبار تفاعلى

• تذكر • فهم •  تطبيق



حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

- ١ فى متوازى الأضلاع كل ضلعين متقابلين .... و ....
- ٢ فى متوازى الأضلاع كل زاويتين متقابلتين ....
- ٣ فى متوازى الأضلاع كل زاويتين متتاليتين ....
- ٤ فى متوازى الأضلاع القطران ....
- ٥ الشكل الرباعى الذى فيه ضلعان فقط متوازيان يُسمى ....
- ٦ يكون الشكل الرباعى متوازى أضلاع إذا .... (اكتب إجابة واحدة)
- ٧ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (د أ) = ٥٠° يكون : ق (د ب) = ...°
- ٨ فى متوازى الأضلاع س ص ع ل إذا كان : ق (د س) = $\frac{1}{2}$ ق (د ص)

  فإن : ق (د ص) = ...°

---

٢ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه :

أ ب = ٢ سم ، أ ء = ٦ سم

، ق (د ب) = ١٠٥° أكمل ما يأتى :

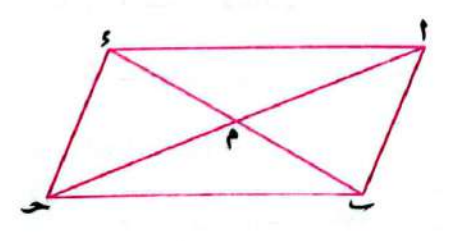
١ ب حـ = ... سم ، ء حـ = ... سم

٢ ق (د ء) = ...° ، ق (د أ) = ...° ، ق (د حـ) = ...°

٣ محيط متوازى الأضلاع أ ب حـ ء = ... سم

---

٣ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع تتقاطع قطراه فى م

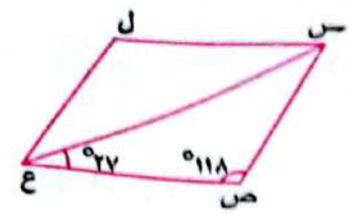
فإذا كان : حـ ء = ٢ سم ، م حـ = ٢,٥ سم

، ب ء = ٣,٦ سم

فاحسب : محيط المثلث أ م ب

«٦,٣ سم»

٤ في الشكل المقابل :



س ص ع ل متوازي أضلاع ، $\overline{\text{س ع}}$ قطر فيه

، ق (∠ ص) = ١١٨° ، ق (∠ س ع ص) = ٢٧°

احسب :

١ ق (∠ ص س ع)

٢ ق (∠ ل ع س)

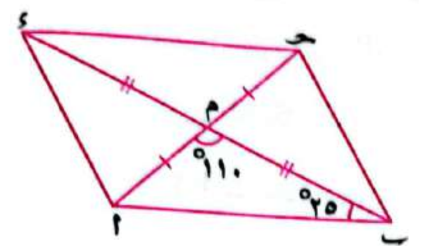
٣ ق (∠ ل س ع)

٤ ق (∠ ل)

«٣٥° ، ٣٥° ، ٢٧° ، ١١٨°»

---

٥ في الشكل المقابل :



أ ب ج د شكل رباعي تقاطع قطراه في م

، م أ = م ج ، م ب = م د

، ق (∠ أ م ب) = ١١٠° ، ق (∠ د م ب أ) = ٢٥°

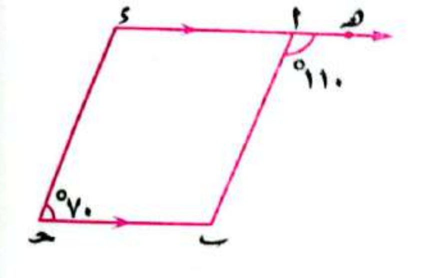
١ أثبت أن : الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع.

٢ أوجد : ق (∠ أ ج د)

«٤٥°»

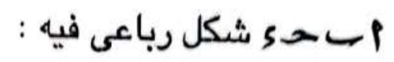
---

٦ في الشكل المقابل :



أ ب ج د شكل رباعي فيه :

$\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب ج}}$ ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{د أ}}$

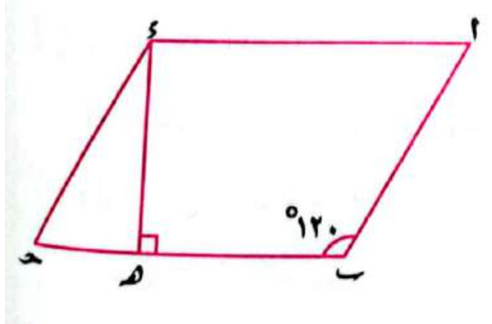


، ق (∠ ب أ هـ) = ١١٠° ، ق (∠ د ج ب) = ٧٠°

أثبت أن : الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع.

---

٧ في الشكل المقابل :



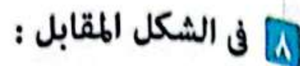
أ ب ج د متوازي أضلاع فيه :

ق (∠ ب) = ١٢٠°

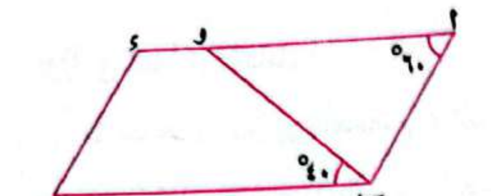
، $\overline{\text{د هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ج}}$ حيث $\overline{\text{د هـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب ج}}$ = {هـ}

أوجد : ق (∠ هـ د ج)

«٣٠°»



٨ في الشكل المقابل :



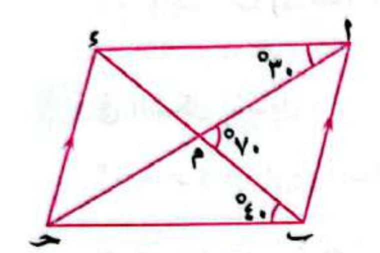
أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٦٠°

، ق (∠ ء ب حـ) = ٤٠° حيث و ∈ أ ء

أوجد : ق (∠ أ ب و)


«٨٠°»

٩ في الشكل المقابل :



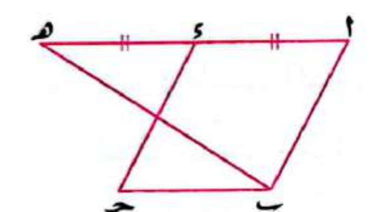
أ ب // ء حـ ، أ حـ ∩ ب ء = {م}

، ق (∠ ء أ حـ) = ٣٠° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٤٠°

، ق (∠ أ م ب) = ٧٠°

برهن أن : الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

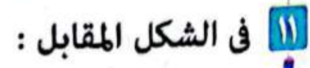
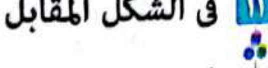
١٠ في الشكل المقابل :



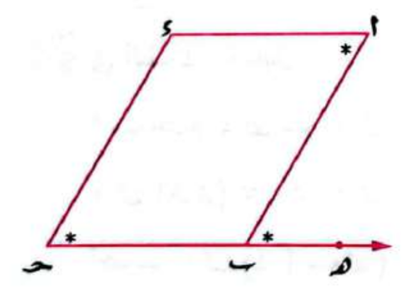
أ ب حـ ء متوازى أضلاع

، هـ ∈ أ ء بحيث أ ء = ء هـ

أثبت أن : ء حـ ، ب هـ ينصف كل منهما الآخر.

١١ في الشكل المقابل :



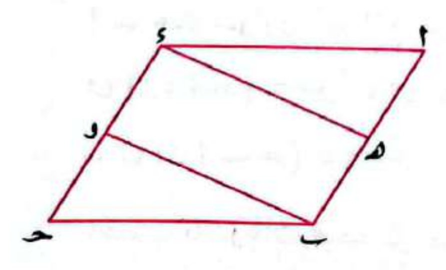
أ ب حـ ء شكل رباعى

، هـ ∈ حـ ب

، ق (∠ ب حـ ء) = ق (∠ هـ ب أ) = ق (∠ أ)

أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

١٢ في الشكل المقابل :

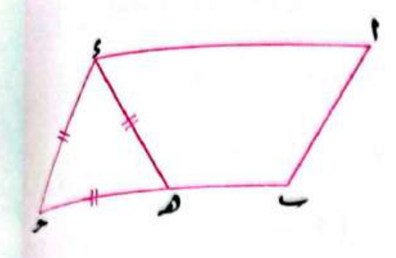


أ ب حـ ء متوازى أضلاع

، هـ منتصف أ ب ، و منتصف ء حـ

أثبت أن : الشكل ء هـ ب و متوازى أضلاع.

١٣ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، هـ ∈ ب حـ

بحيث △ ء هـ حـ متساوى الأضلاع

أثبت أن : أ ب = هـ حـ

ثم أوجد : ق (∠ ب) ، ق (∠ هـ ء أ)

«١٢٠°، ٦٠°»

---

١٤ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه :

هـ ∈ ب حـ ، ء هـ ينصف ∠ أ ء حـ

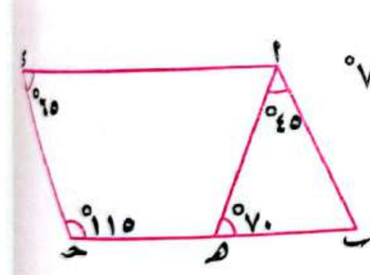
، ق (∠ هـ ء حـ) = ٦٤°

احسب : ق (∠ ء هـ ب) ، ق (∠ أ ب حـ)

«١١٦°، ١٢٨°»

---

١٥ في الشكل المقابل :



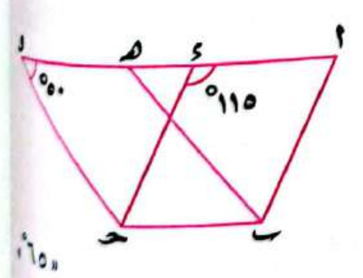
هـ ∈ ب حـ ، ق (∠ ب أ هـ) = ٤٥° ، ق (∠ أ هـ ب) = ٧٠°

، ق (∠ ء) = ٦٥° ، ق (∠ حـ) = ١١٥°

برهن أن : الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

---

١٦ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء ، هـ ب حـ و متوازيا أضلاع

، ق (∠ و) = ٥٠° ، ق (∠ أ ء حـ) = ١١٥°

احسب : ق (∠ أ ب هـ)

«٦٥°»

---

١٧ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع حيث :

ق (∠ ء أ حـ) = س° ، ق (∠ ب أ حـ) = ٢ س°

، ق (∠ أ ب حـ) = ٥ س°

احسب بالدرجات قيمة كل من : ق (∠ ب حـ ء) ، ق (∠ أ ء حـ)

«٦٧٫٥°، ١١٢٫٥°»

١٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (د أ) = ٥٠° فإن : ق (د حـ) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٣٠° (د) ١٥٠°

٢ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (د أ) + ق (د حـ) = ١٤٠°

فإن : ق (د ب) = ...

(أ) ٧٠° (ب) ٤٠° (جـ) ١١٠° (د) ٢٢٠°

٣ إذا كان طولا ضلعين متجاورين فى متوازى أضلاع هما ٣ سم ، ٥ سم

فإن محيط هذا المتوازى يساوى .... سم

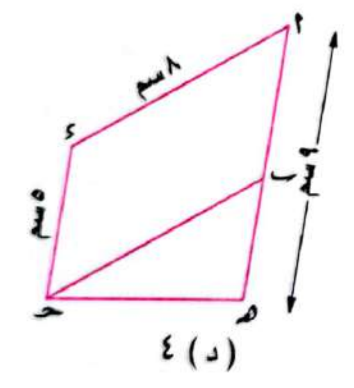
(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٦ (د) ١٨

٤ إذا كان محيط متوازى أضلاع ٢٥ سم ، وطول أحد أضلاعه ٧ سم

فإن طول الضلع المجاور لهذا الضلع يساوى .... سم

(أ) ٧ (ب) ١٨ (جـ) ١٢,٥ (د) ٥,٥

٥ فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع

، هـ ∈ $\overleftarrow{أ ب}$ ، حـ ء = ٥ سم ، أ هـ = ٩ سم

، أ ء = ٨ سم ، محيط △ ب هـ حـ = ١٨ سم

فإن : طول $\overline{هـ حـ}$ = ... سم

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٤

للمتفوقين

١٩ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، و منتصف $\overline{حـ ء}$

فإذا كان : $\overline{أ و}$ ∩ $\overline{ء هـ}$ = {م} ، $\overline{ب و}$ ∩ $\overline{حـ هـ}$ = {ن}

فأثبت أن : ١ $\overline{هـ ء}$ // $\overline{ب و}$ ٢ و م هـ ن متوازى أضلاع.

٢٠ س ص ع ل متوازى أضلاع فيه : ق (د ص) = ٣ ق (د س)

أوجد قياسات الزوايا الداخلة لهذا المتوازى.

«ق (د س) = ق (د ع) = ٤٥° ، ق (د ص) = ق (د ل) = ١٣٥°»

الدرس 4

متوازى الأضلاع فى حالاته الخاصة



درسنا فى الدرس السابق أن متوازى الأضلاع هو شكل رباعى فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان، ويتحقق هذا الشرط أيضًا فى كل من المستطيل و المعين و المربع

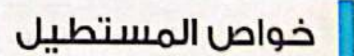
ولذلك نقول إن كلاً من المستطيل والمعين والمربع هو متوازى أضلاع وله جميع خواص متوازى الأضلاع التى سبق ذكرها فى الدرس السابق بالإضافة إلى بعض الخواص الأخرى الخاصة بكل شكل ، وفى هذا الدرس سنتناول كل شكل من الأشكال الثلاثة على حدة.

١ المستطيل

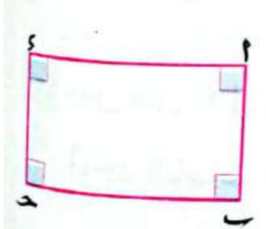
المستطيل هو متوازى أضلاع إحدى زواياه قائمة.

خواص المستطيل

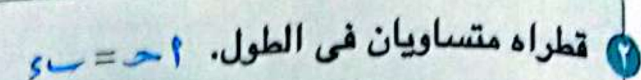
المستطيل له جميع خواص متوازى الأضلاع بالإضافة للخواص الآتية :



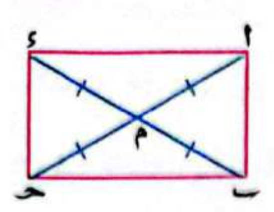
١ زواياه الأربع متساوية فى القياس، وقياس كل منها ٩٠°



ق (∠أ) = ق (∠ب) = ق (∠حـ) = ق (∠ء) = ٩٠°



٢ قطراه متساويان فى الطول. ا حـ = ب ء



وحيث إن القطرين ينصف كل منهما الآخر فإن :

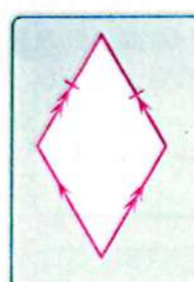
ا م = ب م = حـ م = ء م

محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

٢ المعين

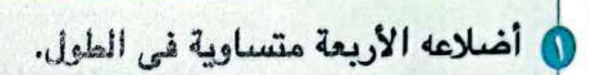
المعين هو متوازى أضلاع فيه

ضلعان متجاوران متساويان فى الطول.



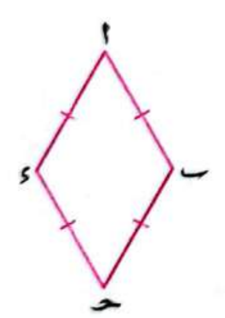
خواص المعين

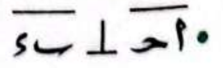
المعين له جميع خواص متوازى الأضلاع بالإضافة للخواص الآتية :



١ أضلاعه الأربعة متساوية فى الطول.

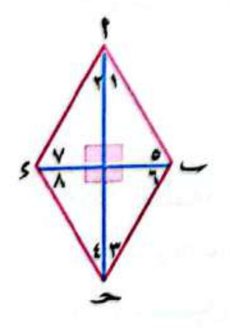
ا ب = ب حـ = حـ ء = ء ا





٢ قطراه متعامدان وينصفان زواياه الداخلة.

- $\overline{\text{ا حـ}} \perp \overline{\text{ب ء}}$
- ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) = ق (∠ ٣) = ق (∠ ٤)
- ق (∠ ٥) = ق (∠ ٦) = ق (∠ ٧) = ق (∠ ٨)



محيط المعين = طول ضلعه × ٤

٣ المربع

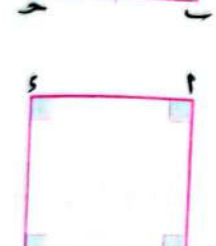
المربع هو متوازى أضلاع إحدى زواياه قائمة
وفيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول.

خواص المربع

المربع له جميع خواص متوازى الأضلاع بالإضافة للخواص الآتية :

١ أضلاعه الأربعة متساوية فى الطول.

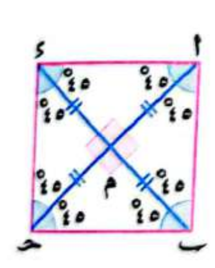
أ ب = ب حـ = حـ ء = ء أ



٢ زواياه الأربع متساوية فى القياس وقياس كل منها ٩٠°

ق (∠ أ) = ق (∠ ب) = ق (∠ حـ) = ق (∠ ء) = ٩٠°

٣ قطراه متساويان فى الطول ، ومتعامدان ، وينصف كل منهما زاويتى الرأسين الواصل بينهما إلى زاويتين قياس كل منهما ٤٥°



- أ حـ = ب ء وبالتالى : أ م = ب م = حـ م = ء م
- $\overline{\text{أ حـ}} \perp \overline{\text{ب ء}}$

محيط المربع = طول ضلعه × ٤

ملاحظة

يمكن تعريف المربع على أنه :

١ مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول.
٢ مستطيل قطراه متعامدان.
٣ معين إحدى زواياه قائمة.
٤ معين قطراه متساويان فى الطول.

لاحظ أنه : لإثبات أن الشكل الرباعى مستطيل أو معين أو مربع نثبت أولاً أن :
هذا الشكل متوازى أضلاع كما درسنا فى الدرس السابق ثم :

يكون متوازى الأضلاع

مستطيلًا

إذا كان :
إحدى زواياه قائمة
أو
القطران متساويين فى الطول

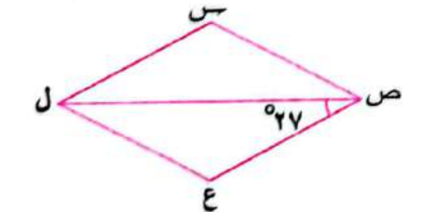
معينًا

إذا كان :
ضلعان متجاوران فيه متساويين فى الطول
أو
القطران متعامدين

مربعًا

إذا كان :
إحدى زواياه قائمة وضلعان متجاوران متساويين فى الطول
أو
إحدى زواياه قائمة وقطراه متعامدين
أو
القطران متساويين فى الطول ومتعامدين
أو
ضلعان متجاوران فيه متساويين فى الطول وقطراه متساويين فى الطول

مثال 1



فى الشكل المقابل :
س ص ع ل معين فيه : ق (∠ ل ص ع) = ٢٧°
احسب قياسات زوايا المعين س ص ع ل

الحـــل

المعطيات	س ص ع ل معين فيه : ق (∠ ل ص ع) = ٢٧°
المطلوب	إيجاد : ق (∠ س ص ع) ، ق (∠ س ل ع) ، ق (∠ س) ، ق (∠ ع)

البرهان ∵ $\overline{صل}$ قطر فى المعين ـس ص ع ل ∴ $\overleftrightarrow{صل}$ ينصف ∠ ـس ص ع

∴ ق (∠ ـس ص ع) = ٢٧° × ٢ = ٥٤°

، ∵ كل زاويتين متقابلتين فى المعين متساويتان فى القياس.

∴ ق (∠ ـس ل ع) = ٥٤°

، ∵ المعين حالة خاصة من متوازى الأضلاع.

∴ كل زاويتين متتاليتين متكاملتان.

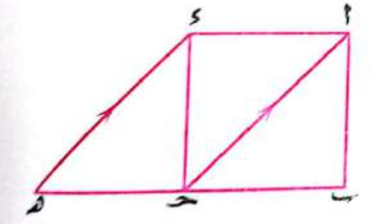
∴ ق (∠ ل ـس ص) + ق (∠ ـس ص ع) = ١٨٠°

∴ ق (∠ ل ـس ص) + ٥٤° = ١٨٠° ∴ ق (∠ ل ـس ص) = ١٢٦°

∴ ق (∠ ل ع ص) = ١٢٦° **(وهو المطلوب)**

(حاول حل هذا المثال بطريقة أخرى باستخدام خواص المعين)

مثال ٢



فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مربع ، رسم $\overleftrightarrow{ءهـ}$ // $\overline{أجـ}$ ليقطع $\overleftrightarrow{بجـ}$ فى هـ

١ أثبت أن : جـ هـ = ب جـ **٢** أوجد : ق (∠ أ ء هـ)

الحل

المعطيات أ ب جـ ء مربع ، $\overleftrightarrow{ءهـ}$ // $\overline{أجـ}$

المطلوب **١** إثبات أن : جـ هـ = ب جـ **٢** إيجاد : ق (∠ أ ء هـ)

البرهان ∵ $\overline{أء}$ // $\overline{بجـ}$ (ضلعان متقابلان فى المربع) ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{بجـ}$

∴ $\overline{أء}$ // $\overline{جـهـ}$ ، ∵ $\overline{ءهـ}$ // $\overline{أجـ}$ (معطى)

∴ الشكل أ جـ هـ ء متوازى أضلاع. ∴ جـ هـ = أ ء

لكن أ ء = ب جـ (ضلعان متقابلان فى المربع) ∴ جـ هـ = ب جـ **(المطلوب أولاً)**

، ∵ $\overline{أحـ}$ قطر فى المربع.

، ∵ ق (∠ب حـ ء) = ٩٠°

∴ $\overrightarrow{حـ أ}$ ينصف ∠ب حـ ء

∴ ق (∠أ حـ ء) = ٤٥°

، ∵ $\overleftrightarrow{ءهـ}$ // $\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ قاطع لهما.

∴ ق (∠حـ ء هـ) = ق (∠أ حـ ء) = ٤٥° (بالتبادل)

، ∵ ق (∠أ ء حـ) = ٩٠° (من خواص المربع)

∴ ق (∠أ ء هـ) = ق (∠أ ء حـ) + ق (∠حـ ء هـ)

= ٩٠° + ٤٥° = ١٣٥°

(المطلوب ثانيًا)

مثال ٣

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء ، هـ ب حـ و متوازيا أضلاع

، ء ، هـ تنتميان إلى $\overleftrightarrow{أو}$ ، أ ب = و حـ ، ب حـ = ء هـ

أثبت أن : الشكل ء ب حـ هـ مستطيل



الحل

المعطيات	أ ب حـ ء ، هـ ب حـ و متوازيا أضلاع ، أ ب = و حـ ، ب حـ = ء هـ
المطلوب	إثبات أن : الشكل ء ب حـ هـ مستطيل.

البرهان

∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع. ∴ $\overline{أء}$ // $\overline{ب حـ}$

، ∵ ء ، هـ تنتميان إلى $\overleftrightarrow{أو}$ ∴ $\overline{ءهـ}$ // $\overline{ب حـ}$

، ∵ ء هـ = ب حـ ∴ ء ب حـ هـ متوازى أضلاع.

، ∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع. ∴ أ ب = ء حـ

، ∵ هـ ب حـ و متوازى أضلاع. ∴ و حـ = هـ ب

ولكن أ ب = و حـ ∴ ء حـ = هـ ب

∴ ء ب حـ هـ متوازى أضلاع فيه القطران متساويان فى الطول

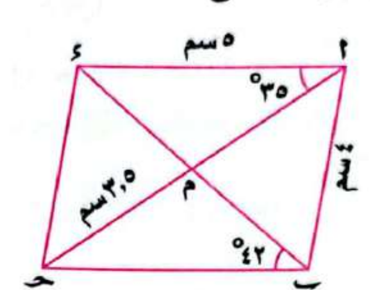
∴ ء ب حـ هـ مستطيل.

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

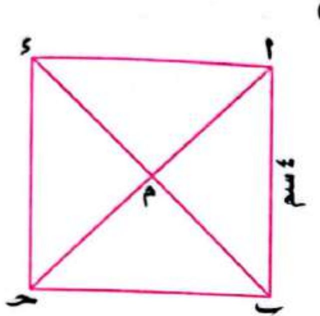
بالاستعانة بالمعطيات فى كل شكل أكمل المطلوب أسفل كل شكل حيث م هى نقطة تقاطع القطرين فى كل شكل.

١ متوازى أضلاع



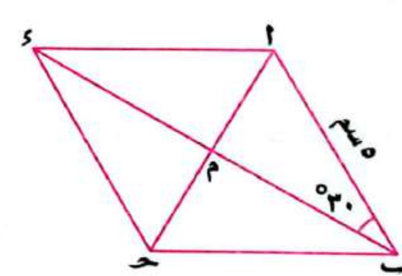
- محيط Δ أ ب حـ = ... سم
- ق (∠ أ م ب) = ...°

٢ مربع



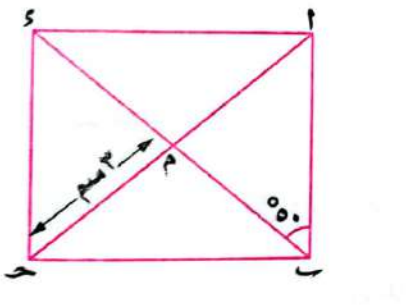
- محيط المربع = ... سم
- ق (∠ ب أ حـ) = ...°

٣ معين

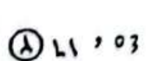


- أ ء = ... سم
- ق (∠ ب أ م) = ...°

٤ مستطيل



- ب ء = ... سم
- ق (∠ م حـ ء) = ...°





تمارين 4
على متوازى الأضلاع فى حالاته الخاصة


اختبار تفاعلى

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

- ١ متوازى الأضلاع الذى قطراه متعامدان يكون ....
- ٢ متوازى الأضلاع الذى قطراه .... يُسمى مستطيلاً.
- ٣ متوازى الأضلاع الذى قطراه متساويان فى الطول ومتعامدان يُسمى ....
- ٤ الشكل الرباعى الذى أضلاعه متساوية فى الطول يُسمى ....
- ٥ الشكل الرباعى الذى قطراه ينصف كل منهما الآخر يُسمى ....
- ٦ المستطيل هو .... إحدى زواياه قائمة.
- ٧ المعين هو .... قطراه متعامدان.
- ٨ المربع هو .... إحدى زواياه قائمة.
- ٩ المعين الذى قطراه متساويان فى الطول يُسمى ....
- ١٠ المستطيل الذى قطراه متعامدان يُسمى ....
- ١١ المستطيل الذى فيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول يُسمى ....
- ١٢ إذا كان : $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$ ، س ص = ع ل فإن الشكل الرباعى س ص ع ل يُسمى ....
- ١٣ إذا كان : أ ب حـ ء معيناً فإن : .... ⊥ ....
- ١٤ محيط المربع = ... ، محيط المستطيل = ... ، محيط المعين = ...
- ١٥ المعين الذى محيطه ٤٢ سم يكون طول ضلعه = ... سم

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ١ قطرا المستطيل ....
  (أ) متعامدان. (ب) متساويان فى الطول.
  (جـ) متساويان فى الطول ومتعامدان. (د) ينصفان زواياه الداخلة.

• ٢ قطرا المعين ....

(أ) متعامدان وغير متساويين فى الطول. (ب) متساويان فى الطول وغير متعامدين.

(جـ) متعامدان ومتساويان فى الطول. (د) غير متساويين فى الطول وغير متعامدين.

• ٣ قطرا المربع ....

(أ) متعامدان فقط. (ب) متساويان فى الطول فقط.

(جـ) متعامدان ومتساويان فى الطول. (د) غير متساويين فى الطول وغير متعامدين.

• ٤ إذا تساوى طولا ضلعين متجاورين فى متوازى الأضلاع كان الشكل ....

(أ) مربعًا. (ب) معينًا. (جـ) مستطيلاً. (د) شبه منحرف.

• ٥ إذا كان : أ ب حـ ء مستطيلاً فيه : أ حـ = ٥ سم فإن : ب ء = ... سم

(أ) ٢,٥ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

• ٦ إذا كان : أ ب حـ ء مربعًا فإن : ق (∠ حـ أ ب) = ...

(أ) ٩٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

• ٧ إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ق (∠ ب) فإن : أ ب حـ ء ....

(أ) مستطيل. (ب) معين. (جـ) مربع. (د) شبه منحرف.

• ٨ إذا كان : أ ب حـ ء معينًا فيه : ق (∠ أ حـ ب) = ٣٢° فإن : ق (∠ ء) = ...

(أ) ٣٢° (ب) ٦٤° (جـ) ١١٦° (د) ٢٦°

٣ فى الشكل المقابل :

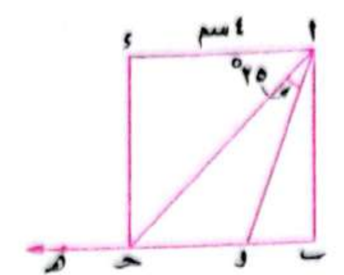
أ ب حـ ء مستطيل ، أ حـ = ٦ سم

، حـ ء = ٢ سم ، م نقطة تقاطع القطرين.

أكمل ما يأتى : ١ أ ب = ... سم ٢ ء م = ... سم

٣ محيط △ أ ب م = ... سم

٤ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٤ سم ، و ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

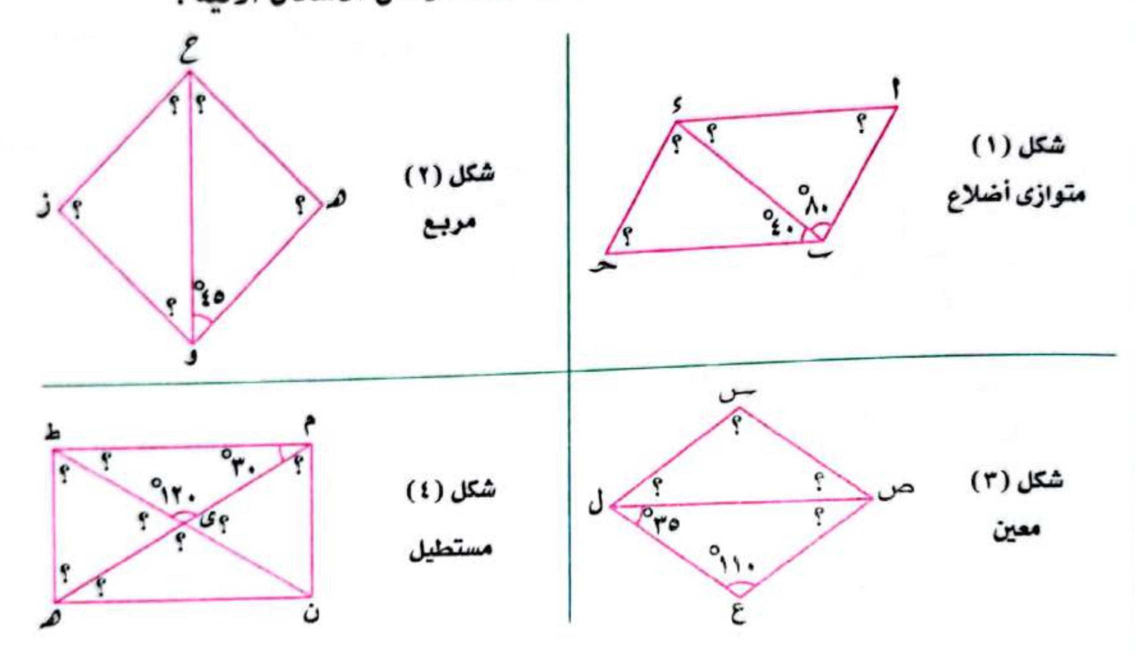
بحيث ق (∠ و أ حـ) = ٢٥° ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ أكمل ما يأتي :

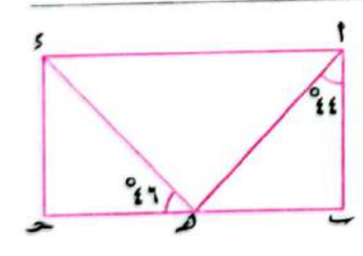
١ محيط المربع = ... سم

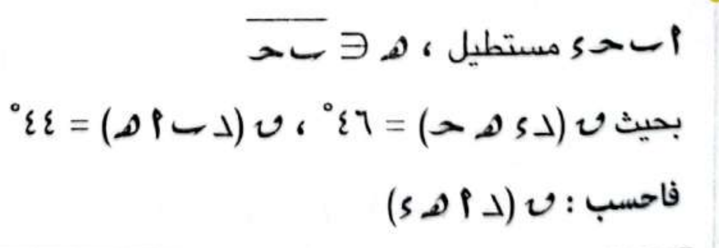
٢ ق (∠ أ حـ هـ) = ...°

٣ ق (∠ أ و حـ) = ...°

٥ عين قياسات الزوايا المشار إليها بالعلامة (؟) في كل شكل من الأشكال الآتية :







٦ في الشكل المقابل :

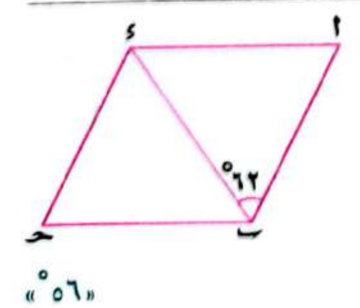
أ ب حـ ء مستطيل ، هـ ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

بحيث ق (∠ ء هـ حـ) = ٤٦° ، ق (∠ ب أ هـ) = ٤٤°

فاحسب : ق (∠ أ هـ ء)

«٨٨°»

٧ في الشكل المقابل :



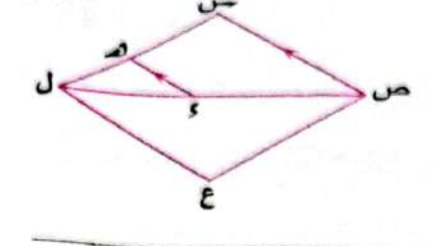
أ ب حـ ء معين ، $\overline{\text{ب ء}}$ قطر فيه

، ق (∠ أ ب ء) = ٦٢°

أوجد بالبرهان : ق (∠ أ)

«٥٦°»

٨ في الشكل المقابل :

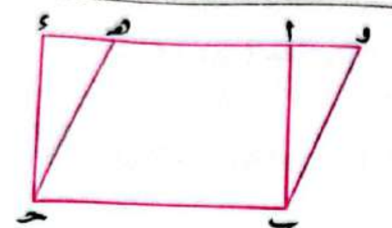


س ص ع ل معين ، ء ∈ $\overline{\text{ص ل}}$

، رسم $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ص س}}$ ويقابل $\overline{\text{س ل}}$ في هـ

أثبت أن : ق (∠ هـ ء ل) = ق (∠ هـ ل ء)

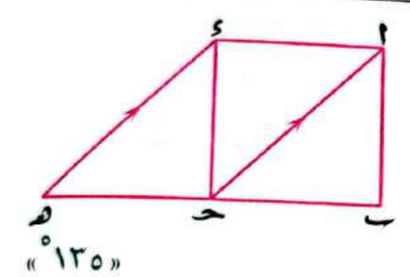
٩ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مستطيل ، و ب حـ هـ متوازي أضلاع.

أثبت أن : أ و = ء هـ

١٠ في الشكل المقابل :



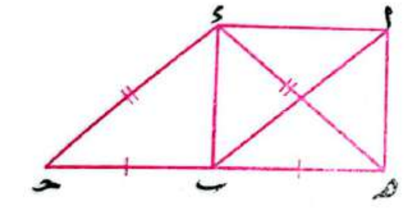
أ ب حـ ء مربع ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$

١ أثبت أن : أ حـ هـ ء متوازي أضلاع.

٢ أوجد : ق (∠ أ حـ هـ)

«١٣٥°»

١١ في الشكل المقابل :

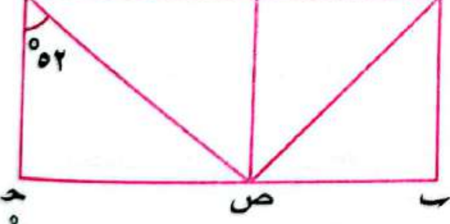
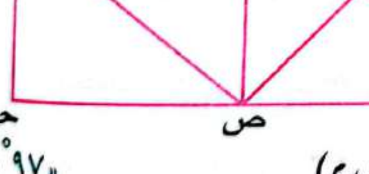


أ ب حـ ء متوازي أضلاع

، هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ بحيث ب هـ = ب حـ

فإذا كان : ء هـ = ء حـ أثبت أن : الشكل أ هـ ب ء مستطيل.

١٢ في الشكل المقابل :

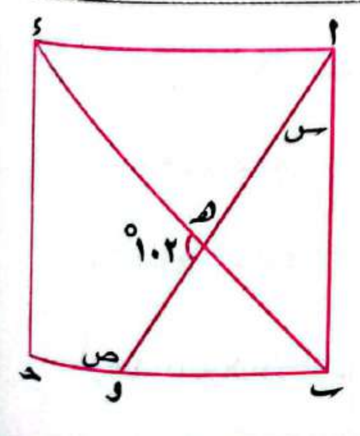
أ ب حـ ء مستطيل ، س ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

بحيث يكون الشكل أ س ص ب مربعًا

فإذا كان : ق (∠ ص ء حـ) = ٥٢° فأوجد بالبرهان : ق (∠ أ ص ء)

«٩٧°»

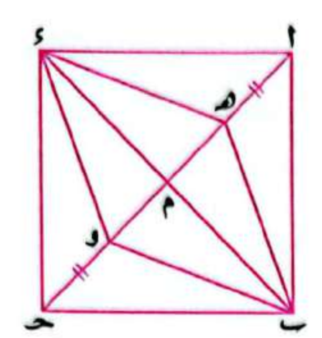
١٣ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع.

أوجد بالدرجات قيمة كل من : س ، ص

«٣٣° ، ١٢٣°»



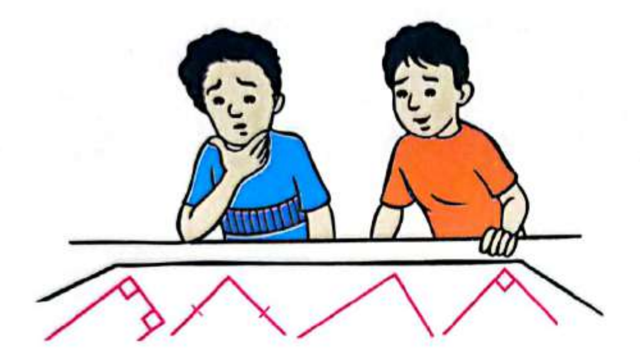
١٤ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مربع تقاطع قطراه فى م

، هـ ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ ، و ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ بحيث أ هـ = حـ و

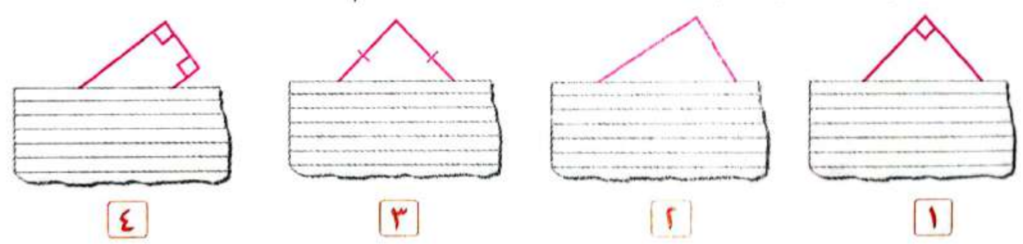
أثبت أن : الشكل هـ ب و ء معين.

للمتفوقين



١٥ قام إسلام برسم متوازى أضلاع ، معين ، مستطيل ، مربع ثم قام بإخفاء أجزاء منهم كما بالشكل المقابل وطلب من صديقه باسم التعرف على كل شكل.

ساعد باسم فى وضع اسم كل شكل أسفل الشكل المرسوم.



١٦ استخدم (بعض) أو (كل) لتحصل على عبارة صحيحة :

١ .... المربعات مستطيلات.

٢ .... الأشكال الرباعية متوازيات أضلاع.

٣ .... المربعات معينات.

٤ .... متوازيات الأضلاع مستطيلات.

٥ .... المستطيلات متوازيات أضلاع.

٦ .... المعينات مربعات.

الدرس 5 المثلث



نظرية ١

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث يساوى ١٨٠°

المعطيات | أ ب حـ مثلث

المطلوب | إثبات أن : ق (∠ أ) + ق (∠ ب) + ق (∠ أ حـ ب) = ١٨٠°

العمل | نرسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ويمر بنقطة حـ

البرهان | ∵ ∠ س حـ ص زاوية مستقيمة.

∴ ق (∠ س حـ أ) + ق (∠ أ حـ ب) + ق (∠ ص حـ ب) = ١٨٠°

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

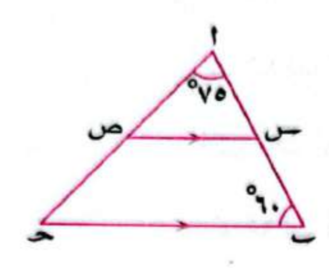
∴ ق (∠ س حـ أ) = ق (∠ أ) (بالتبادل)

، ق (∠ ص حـ ب) = ق (∠ ب) (بالتبادل)

∴ ق (∠ أ) + ق (∠ أ حـ ب) + ق (∠ ب) = ١٨٠° (وهو المطلوب)

مثال ١

فى الشكل المقابل :



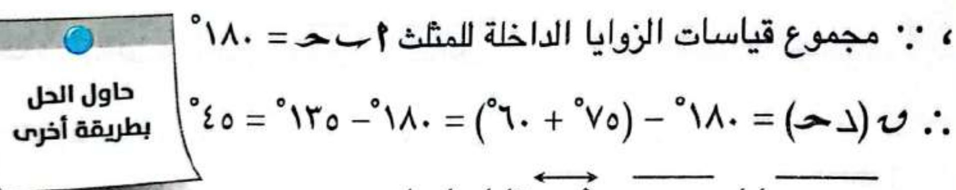
أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٧٥° ، ق (∠ ب) = ٦٠°

، س ∈ أ ب ، ص ∈ أ حـ بحيث س ص // ب حـ

أوجد : ق (∠ أ ص س)

الحـــل

المعطيات	س ص // ب حـ ، ق (∠ أ) = ٧٥° ، ق (∠ ب) = ٦٠°
المطلـوب	إيجاد : ق (∠ أ ص س)
البرهـان	∵ ق (∠ أ) = ٧٥° ، ق (∠ ب) = ٦٠° (معطيات)



، ∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث أ ب حـ = ١٨٠°

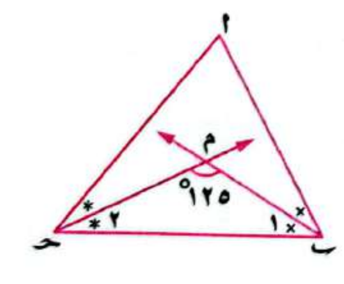
∴ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٧٥° + ٦٠°) = ١٨٠°− ١٣٥° = ٤٥°

، ∵ س ص // ب حـ ، أ حـ قاطع لهما.

∴ ق (∠ أ ص س) = ق (∠ حـ) = ٤٥° (بالتناظر) (وهو المطلوب)

مثال ٢

فى الشكل المقابل :



ب م ينصف ∠ أ ب حـ ، حـ م ينصف ∠ أ حـ ب

، ق (∠ ب م حـ) = ١٢٥°

أوجد : ق (∠ أ)

الحـــل

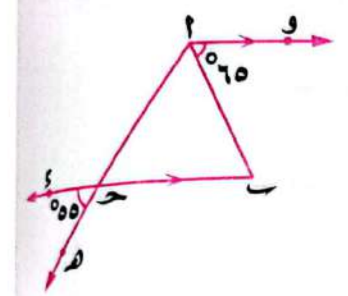
المعطيات	ب م ينصف ∠ أ ب حـ ، حـ م ينصف ∠ أ حـ ب ، ق (∠ ب م حـ) = ١٢٥°
المطلـوب	إيجاد : ق (∠ أ)

البرهــان	∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث م ب حـ = ١٨٠°
	، ق (∠ ب م حـ) = ١٢٥°
	∴ ق (∠ ١) + ق (∠ ٢) = ١٨٠° − ١٢٥° = ٥٥°
	لكن : ق (∠ أ ب حـ) = ٢ ق (∠ ١) ، ق (∠ أ حـ ب) = ٢ ق (∠ ٢)
	∴ ق (∠ أ ب حـ) + ق (∠ أ حـ ب) = ٢ × ٥٥° = ١١٠°
	، ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث أ ب حـ = ١٨٠°
	∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك ١

في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{ب ء}} \cap \overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ = {حـ} ، $\overrightarrow{\text{أ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

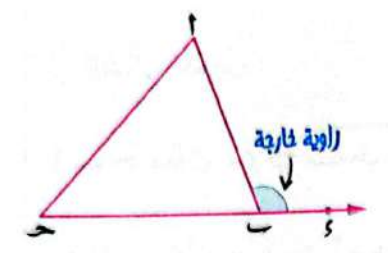
، ق (∠ ب أ و) = ٦٥° ، ق (∠ ء حـ هـ) = ٥٥°

أكمل البرهان التالي لإيجاد قياسات زوايا المثلث أ ب حـ

المعطيات	....
المطلـوب	....
البرهــان	∵ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}} \cap \overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ = {حـ} (معطى)
	∴ ق (∠ أ حـ ب) = ق (∠ ....) = ...° (بـ ....)
	، ∵ $\overrightarrow{\text{أ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ قاطع لهما
	∴ ق (∠ ....) = ق (∠ و أ ب) = ...° (بـ ....)
	، ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ...°
	∴ ق (∠ ب أ حـ) = ...° − (............° + ...°)
	= ....°

(وهو المطلوب)

الزاوية الخارجة للمثلث

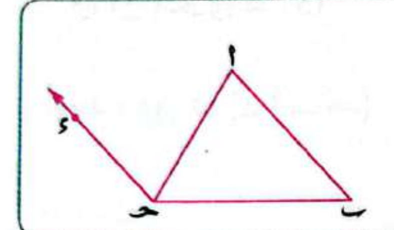


فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب حـ مثلثًا ، ء $\in$ $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ ، ء $\notin$ $\overline{\text{حـ ب}}$

فإن : ∠ أ ب ء تسمى زاوية خارجة للمثلث أ ب حـ

لاحظ أن :



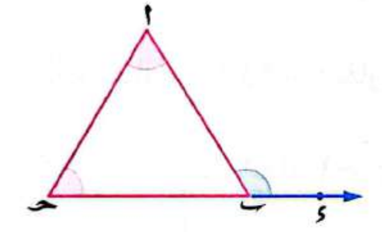
فى الشكل المقابل :

∠ أ حـ ء ليست خارجة عن Δ أ ب حـ

لأن ء $\notin$ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

قياس الزاوية الخارجة للمثلث

قياس أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا قياس المجاورة لها.



ففى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب حـ مثلثًا ، ء $\in$ $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ ، ء $\notin$ $\overline{\text{حـ ب}}$

فإن : ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ) + ق (∠ حـ)

ويمكن إثبات ذلك كما يلى :

$\because$ ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) + ق (∠ أ ب حـ) = ١٨٠° ، $\because$ ق (∠ أ ب ء) + ق (∠ أ ب حـ) = ١٨٠°

$\therefore$ ق (∠ أ ب ء) + ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) + ق (∠ أ ب حـ)

$\therefore$ ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) (وهو المطلوب)

لاحظ أن :

قياس الزاوية الخارجة للمثلث أكبر من قياس أى زاوية داخلة للمثلث عدا المجاورة لها.

أى أنه فى الشكل السابق : ق (∠ أ ب ء) > ق (∠ أ) ، ق (∠ أ ب ء) > ق (∠ حـ)

مثال ٣

في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث ، د ∈ ب ح ، هـ ∈ أ ح

بحيث ب هـ ينصف ∠ أ ب ح ، ق (∠ أ) = ٨٠°

، ق (∠ أ ح د) = ١٥٠°

أوجد : ١ ق (∠ أ ب ح) ٢ ق (∠ ب هـ ح)

الحل

المعطيات | ب هـ ينصف ∠ أ ب ح ، ق (∠ أ) = ٨٠° ، ق (∠ أ ح د) = ١٥٠°

المطلوب | إيجاد : ١ ق (∠ أ ب ح)

٢ ق (∠ ب هـ ح)

البرهان | ∵ ∠ أ ح د خارجة للمثلث أ ب ح

∴ ق (∠ أ ح د) = ق (∠ أ) + ق (∠ أ ب ح)

∴ ١٥٠° = ٨٠° + ق (∠ أ ب ح)

∴ ق (∠ أ ب ح) = ١٥٠° − ٨٠° = ٧٠° (المطلوب أولاً)

حاول الحل بطريقة أخرى

، ∵ ب هـ ينصف ∠ أ ب ح (معطى)

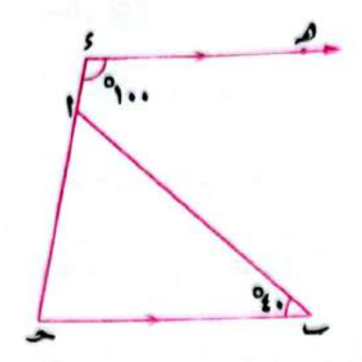
∴ ق (∠ أ ب هـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ ب ح) = $\frac{70^\circ}{2}$ = ٣٥°

، ∵ ∠ ب هـ ح خارجة للمثلث أ ب هـ

∴ ق (∠ ب هـ ح) = ق (∠ أ) + ق (∠ أ ب هـ)

= ٨٠° + ٣٥° = ١١٥° (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك ٢



فى الشكل المقابل :

أ ∈ ءحـ ، ءهـ // حـب

، ق(∠ء) = ١٠٠° ، ق(∠ب) = ٤٠°

أكمل البرهان التالى لإيجاد : ق(∠ب أ ء)

المعطيات ....

المطلوب ....

البرهان ∵ ءهـ // .... ، .... قاطع لهما

∴ ق(∠ء) + ق(∠حـ) = ...° (داخلتان وفى جهة واحدة من القاطع)

، ∵ ق(∠ء) = ...°

∴ ق(∠حـ) = ...° − ....° = ...°

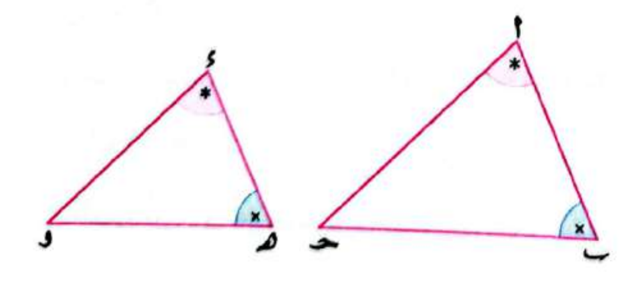
، ∵ ∠ب أ ء خارجة للمثلث ....

∴ ق(∠ب أ ء) = ق(∠ ....) + ق(∠ ....)

= ....° + ...° = ...° (وهو المطلوب)

ملاحظة ١

إذا ساوت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر فى القياس كان قياس الزاوية الثالثة من المثلث الأول مساويًا لقياس الزاوية الثالثة من المثلث الآخر.



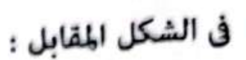
ففى ΔΔ أ ب حـ ، ء هـ و :

إذا كان : ق(∠أ) = ق(∠ء)

، ق(∠ب) = ق(∠هـ)

فإن : ق(∠حـ) = ق(∠و)

مثال ٤



في الشكل المقابل :

أ ب حـ ، ء هـ و مثلثان ، هـ ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، و ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

، $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$

أثبت أن : ق (∠ أ) = ق (∠ ء)

الحل

المعطيات | $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$

المطلوب | إثبات أن : ق (∠ أ) = ق (∠ ء)

البرهان | ∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ قاطع لهما ∴ ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) (بالتناظر)

، ∵ $\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ قاطع لهما ∴ ق (∠ ٣) = ق (∠ ٤) (بالتناظر)

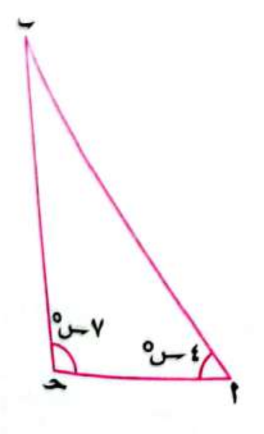
∵ ΔΔ أ ب حـ ، ء هـ و فيهما : ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) ، ق (∠ ٣) = ق (∠ ٤)

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ء) (وهو المطلوب)

ملاحظة ٢

- إذا كان مجموع قياسي زاويتين في مثلث يساوي ٩٠° فإن الزاوية الثالثة قائمة.
- إذا كان مجموع قياسي زاويتين في مثلث أقل من ٩٠° فإن الزاوية الثالثة منفرجة.
- إذا كان مجموع قياسي زاويتين في مثلث **أكبر من** ٩٠° فإن الزاوية الثالثة حادة.

مثال ٥



في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب) = ٤ س°

، ق (∠ حـ) = ٧ س°

أثبت أن : ∠ حـ منفرجة.

الحـــل

المعطيات | $ق(\angle أ) = ٢ ق(\angle ب) = ٤ س^\circ$ ، $ق(\angle حـ) = ٧ س^\circ$

المطلوب | إثبات أن : $\angle$ حـ منفرجة.

البرهـــان | $\because ٢ ق(\angle ب) = ٤ س^\circ$ $\therefore ق(\angle ب) = ٢ س^\circ$

$\therefore ق(\angle أ) + ق(\angle ب) = ٤ س^\circ + ٢ س^\circ = ٦ س^\circ$

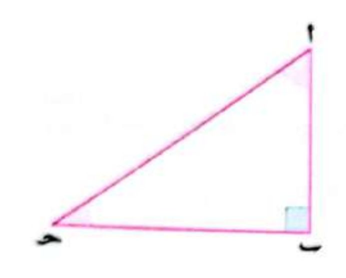
، $\because ق(\angle حـ) = ٧ س^\circ$ $\therefore ق(\angle أ) + ق(\angle ب) < ق(\angle حـ)$

$\therefore \angle$ حـ منفرجة. (وهو المطلوب)

ملاحظة ٣

إذا ساوى قياس زاوية فى مثلث مجموع قياسى الزاويتين الأخريين كان المثلث قائم الزاوية.

ففى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب حـ مثلثًا فيه : $ق(\angle أ) + ق(\angle حـ) = ق(\angle ب)$

فإن : $ق(\angle ب) = \frac{١٨٠^\circ}{٢} = ٩٠^\circ$

أى أن : $\triangle$ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

مثال ٦

أ ب حـ مثلث فيه : $ق(\angle أ) : ق(\angle ب) : ق(\angle حـ) = ٢ : ٣ : ٥$

أثبت أن المثلث أ ب حـ قائم الزاوية واذكر الزاوية القائمة.

الحـــل

المعطيات | $\triangle$ أ ب حـ فيه : $ق(\angle أ) : ق(\angle ب) : ق(\angle حـ) = ٢ : ٣ : ٥$

المطلوب | إثبات أن : $\triangle$ أ ب حـ قائم الزاوية وذِكْر الزاوية القائمة.

البرهـــان | $\because ق(\angle أ) + ق(\angle ب)$ يعادل ٥ أجزاء ، $ق(\angle حـ)$ يعادل ٥ أجزاء

$\therefore ق(\angle أ) + ق(\angle ب) = ق(\angle حـ)$

، $\because$ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة $= ١٨٠^\circ$

$\therefore ق(\angle أ) + ق(\angle ب) + ق(\angle حـ) = ١٨٠^\circ$

$\therefore ق(\angle أ) + ق(\angle ب) = ق(\angle حـ) = ٩٠^\circ$

$\therefore \triangle$ أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ (وهو المطلوب)



اختبار تفاعلي

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتي :

١ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ...°

٢ قياس الزاوية الخارجة لأى مثلث يساوى مجموع ....

٣ إذا ساوى قياس زاوية فى مثلث مجموع قياسى الزاويتين الأخريين كان المثلث ....

٤ إذا كان قياس زاوية فى مثلث أكبر من مجموع قياسى الزاويتين الأخريين كان المثلث ....

٥ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ق (∠ ب) فإن : ق (∠ ب) = ...°

٦ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ ب) > ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) فإن : ∠ ب ....

٧ يمكن أن يكون قياس كل زاوية من الزوايا الداخلة للمثلث مساويًا ....°

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ يحتوى المثلث على زاويتين .... على الأقل.

(أ) حادتين (ب) منفرجتين (جـ) قائمتين (د) منعكستين

٢ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوى قياس ....

(أ) زاوية قائمة. (ب) زاوية مستقيمة. (جـ) زاوية حادة. (د) زاوية منعكسة.

٣ فى Δ س ص ع إذا كان : ق (∠ س) = ٥٠° ، ق (∠ ص) = ١٠٠°

فإن : ق (∠ ع) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٨٠° (د) ١٠٠°

٤ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ١١٠° فإن : ق (∠ حـ) = ...

(أ) ١١٠° (ب) ٩٠° (جـ) ٧٠° (د) ٥٥°

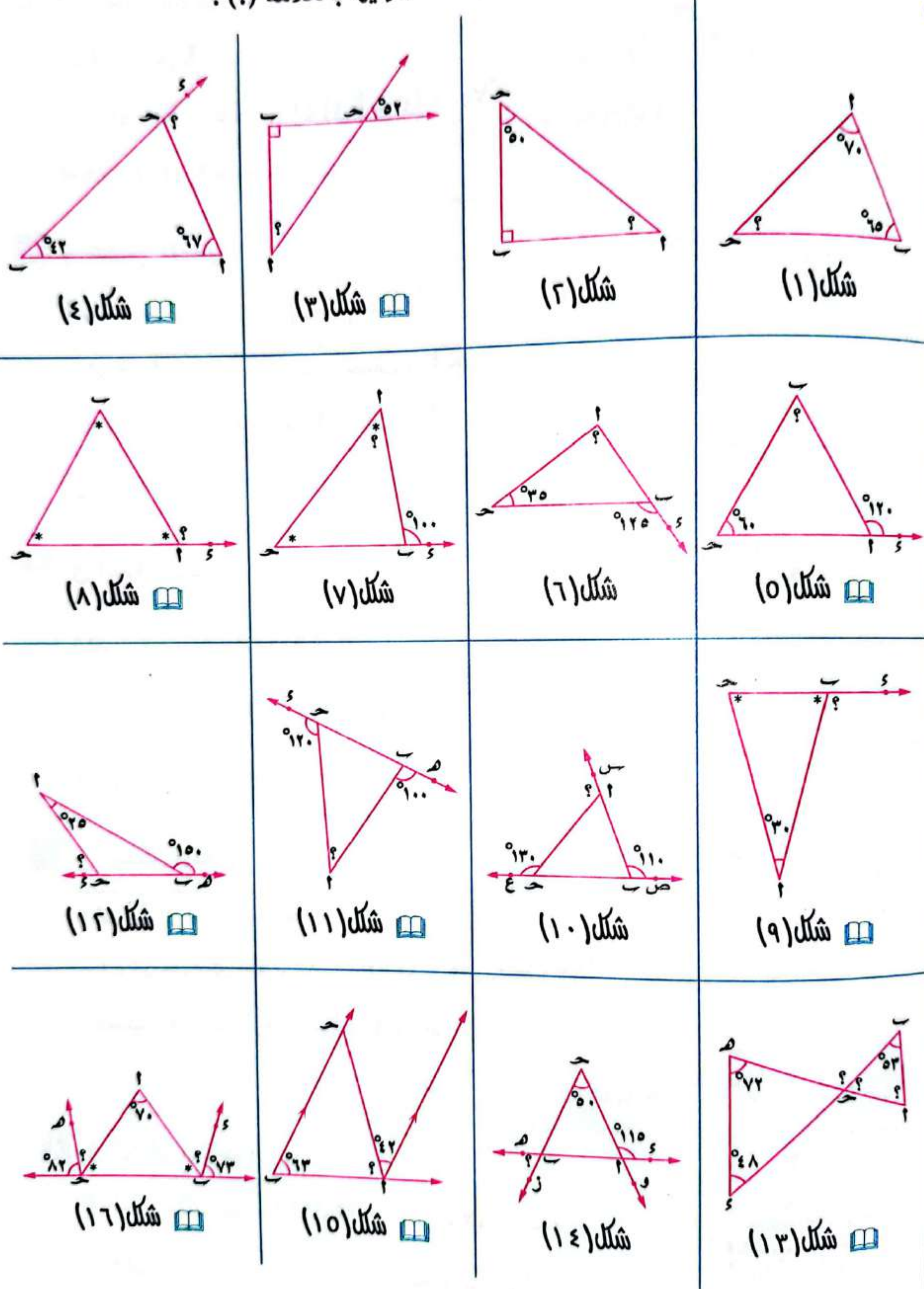
٥ إذا كان قياسا زاويتين فى مثلث ٣٥° ، ٤٥° كان المثلث ....

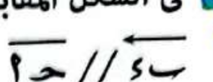
(أ) حاد الزوايا. (ب) قائم الزاوية. (جـ) منفرج الزاوية. (د) متساوى الأضلاع.

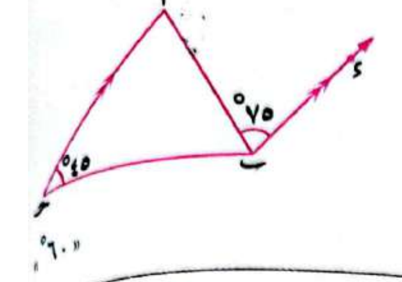
٦ قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس مثلث متساوى الأضلاع يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٣٠°

٣ في كل من الأشكال الآتية أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالعلامة (؟) :







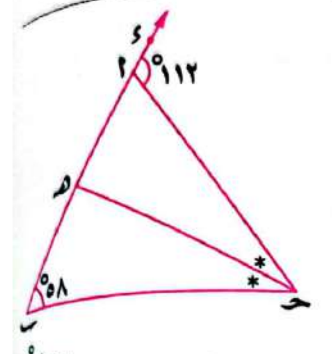
٤ في الشكل المقابل :

$\overleftarrow{ب ء}$ // $\overline{حـ ا}$

، ق (∠ حـ) = ٤٥° ، ق (∠ ا ب ء) = ٧٥°

أوجد : ق (∠ ا ب حـ)

«٦٠°»



٥ في الشكل المقابل :

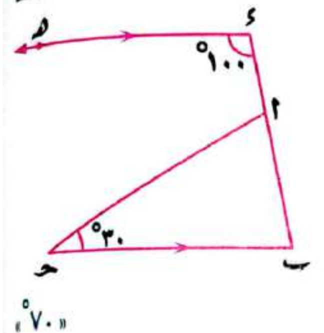
ا ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ب) = ٥٨°

، هـ ∈ $\overline{ا ب}$ بحيث $\overleftarrow{حـ هـ}$ ينصف ∠ ا حـ ب

، ء ∈ $\overleftarrow{ب ا}$ ، ق (∠ حـ ا ء) = ١١٢°

أوجد : ق (∠ ا هـ حـ)

«٨٥°»



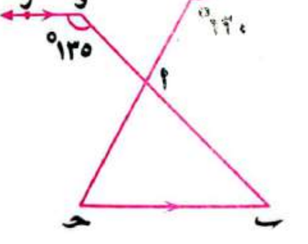
٦ في الشكل المقابل :

$\overleftarrow{ء هـ}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق (∠ ء) = ١٠٠°

، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، ا ∈ $\overline{ء ب}$

أوجد : ق (∠ ب ا حـ)

«٧٠°»



٧ في الشكل المقابل :

$\overleftarrow{ء هـ}$ // $\overleftarrow{و ز}$ // $\overline{ب حـ}$

، ق (∠ حـ ء هـ) = ١٢٠° ، ق (∠ ز و ب) = ١٣٥°

احسب : قياسات زوايا المثلث ا ب حـ

«ق (∠ ب) = ٤٥° ، ق (∠ حـ) = ٦٠° ، ق (∠ ب ا حـ) = ٧٥°»

٨ في الشكل المقابل :

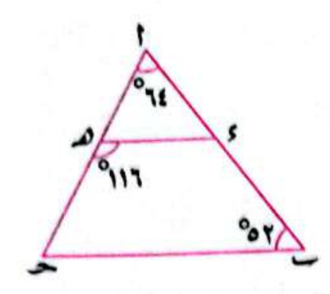
ا ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ا) = ٨٠° ، ق (∠ ب) = ٦٠°

، $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب حـ}$ حيث : ء ∈ $\overline{ا ب}$ ، هـ ∈ $\overline{ا حـ}$

أوجد : ق (∠ ا هـ ء) ، ق (∠ ء هـ حـ)

«٤٠° ، ١٤٠°»

٩ في الشكل المقابل :



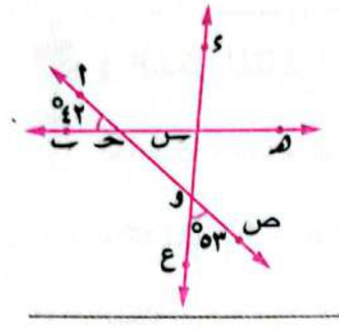
أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٦٤°

، ق (∠ ب) = ٥٢° ، ق (∠ ٤ هـ حـ) = ١١٦°

، هـ ∈ أ حـ ، ٤ ∈ أ ب

أثبت أن : ٤ هـ // ب حـ

١٠ في الشكل المقابل :



أثبت أن : ق (∠ ٤ س هـ) = ٨٥°

ثم أوجد :

ق (∠ ٤ س حـ) ، ق (∠ هـ س و) «٩٥° ، ٩٥°»

١١ في الشكل المقابل :

هـ ٤ // ب أ ، ق (∠ حـ أ و) = ١١٠°

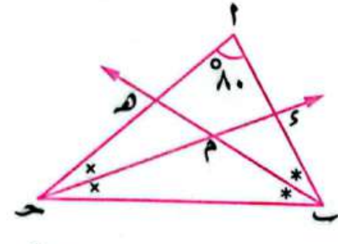
، ٤ ب ∩ أ هـ = {حـ}

، ق (∠ ٤ حـ هـ) = ٦٠° ، و ∈ ب أ

أوجد : قياسات زوايا المثلثين ٤ حـ هـ ، أ ب حـ

«ق (∠ هـ) = ٧٠° ، ق (∠ ٤) = ٥٠° ، ق (∠ ب) = ٥٠° ، ق (∠ أ حـ ب) = ٦٠° ، ق (∠ ب أ حـ) = ٧٠°»

١٢ في الشكل المقابل :

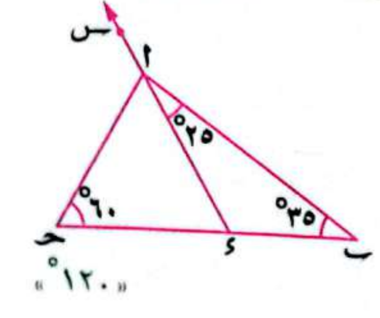


ب م ينصف ∠ أ ب حـ ، حـ م ينصف ∠ أ حـ ب

فإذا كان : ق (∠ أ) = ٨٠°

أوجد : ق (∠ هـ م ٤) «١٣٠°»

١٣ في الشكل المقابل :

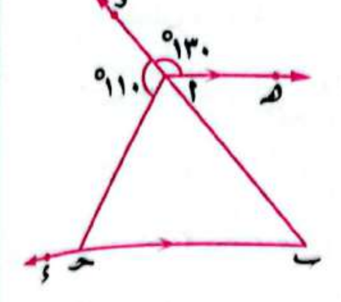


أ ب حـ مثلث ، ق (∠ ب) = ٣٥° ، ق (∠ حـ) = ٦٠°

، ق (∠ ب أ ٤) = ٢٥° ، ٤ ∈ ب حـ ، س ∈ ٤ أ

أوجد : ق (∠ س أ حـ) «١٢٠°»

١٤ في الشكل المقابل :



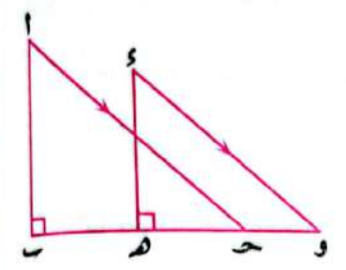
أ ب حـ مثلث ، $\overleftrightarrow{أ هـ}$ // $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، ء ∈ $\overrightarrow{ب حـ}$ ، و ∈ $\overrightarrow{ب أ}$

، ق (∠ و أ هـ) = ١٣٠° ، ق (∠ و أ حـ) = ١١٠°

أوجد : ق (∠ أ حـ ء)

«١٢٠°»

١٥ في الشكل المقابل :

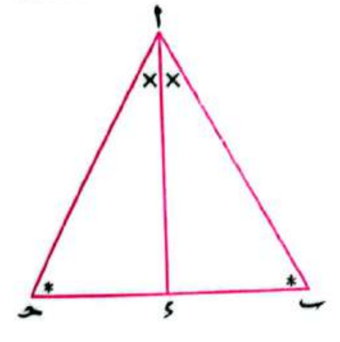


النقط و ، حـ ، هـ ، ب على استقامة واحدة

، ق (∠ ب) = ق (∠ ء هـ حـ) = ٩٠° ، $\overline{أ حـ}$ // $\overline{ء و}$

أثبت أن : ق (∠ أ) = ق (∠ ء)

١٦ 📖 في الشكل المقابل :

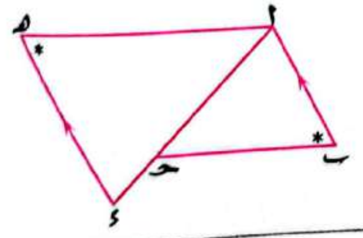


أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

، $\overrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ حـ

أثبت أن : أ ب = أ حـ

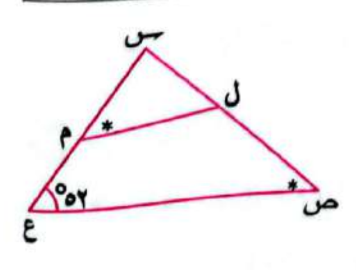
١٧ في الشكل المقابل :



$\overline{أ ب}$ // $\overline{هـ ء}$ ، ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ هـ ء)

أثبت أن : $\overline{ب حـ}$ // $\overline{أ هـ}$

١٨ في الشكل المقابل :



س ص ع مثلث فيه : ق (∠ ع) = ٥٢°

، ل ∈ $\overline{س ص}$

، م ∈ $\overline{س ع}$ بحيث : ق (∠ ص) = ق (∠ س م ل)

أوجد : ق (∠ س ل م)

«٥٢°»

١٩ فى الشكل المقابل :



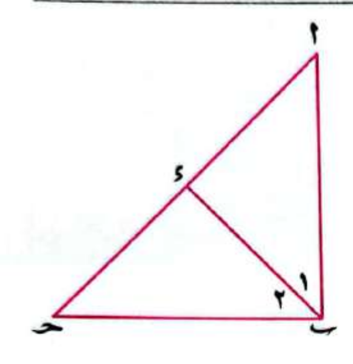
أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

، ء ∈ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ء أ حـ

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

---

٢٠ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : ء ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$

، ق (∠ ١) = ق (∠ أ) ، ق (∠ ٢) = ق (∠ حـ)

أثبت أن : ∠ أ ب حـ قائمة.

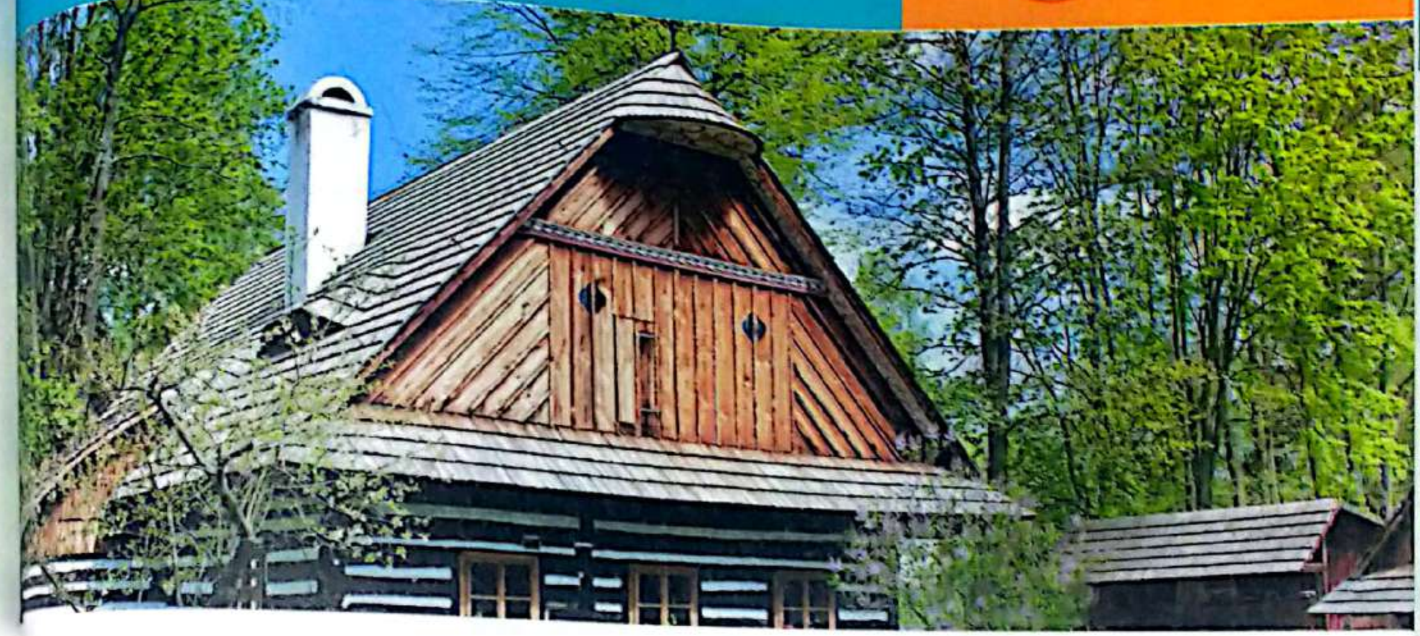
للمتفوقين

٢١ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ حـ) ، ق (∠ ب) = ٤ ق (∠ حـ) أثبت أن : ∠ ب منفرجة.

---

٢٢ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ حـ) = ٢٨° ، ق (∠ أ) = ٤ س° ، ق (∠ ب) = (٢ س + ٢)°

أوجد : ق (∠ أ) ، ق (∠ ب) «١٠٠° ، ٥٢°»



الدرس 6 تابع المثلث

نظرية ٢

الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى المثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث.

المعطيات | د منتصف $\overline{أب}$ ، $\overrightarrow{ده} // \overline{بج}$

المطلوب | إثبات أن : هـ منتصف $\overline{أج}$

العمل | نرسم $\overleftrightarrow{أس} // \overline{بج}$

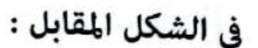
البرهان | ∵ $\overleftrightarrow{أس} // \overleftrightarrow{ده} // \overline{بج}$

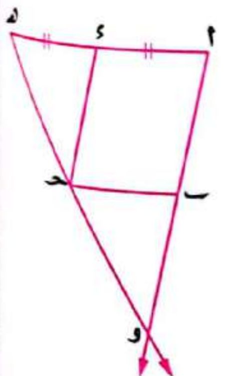
، $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أج}$ قاطعان لهم فى د ، هـ على الترتيب.

، ∵ أد = دب ∴ أهـ = هـج

∴ هـ منتصف $\overline{أج}$


(وهو المطلوب)


مثال ١



فى الشكل المقابل :

أبجد متوازى أضلاع ، هـ ∈ $\overleftarrow{أد}$ بحيث أد = دهـ

، $\overleftrightarrow{هـج} \cap \overleftrightarrow{أب} = \{و\}$

أثبت أن : ١ هـج = جو ٢ أب = بو

الحــل

المعطيات	أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، أ ء = ء هـ ، $\overleftrightarrow{هـ حـ} \cap \overleftrightarrow{أ ب} = \{و\}$
المطلـوب	إثبات أن : ١ هـ حـ = حـ و ٢ أ ب = ب و
البرهـان	فى Δ هـ أ و : ∵ ء منتصف $\overline{هـ أ}$ (معطى)
	، $\overline{ء حـ}$ // $\overline{أ و}$ (من تعريف متوازى الأضلاع)
	∴ حـ منتصف $\overline{هـ و}$ أى هـ حـ = حـ و (نظرية) (المطلوب أولاً)
	، ∵ حـ منتصف $\overline{و هـ}$ (إثباتًا)
	، $\overline{حـ ب}$ // $\overline{هـ أ}$ (من تعريف متوازى الأضلاع)
	∴ ب منتصف $\overline{أ و}$ أى أ ب = ب و (نظرية) (المطلوب ثانيًا)

نتيجــة

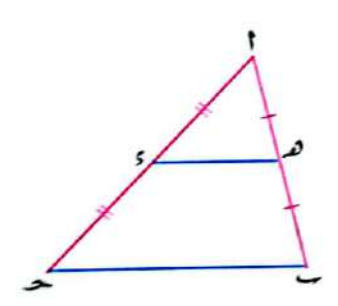
القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث.

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب حـ مثلثًا فيه : ء منتصف $\overline{أ حـ}$

، هـ منتصف $\overline{أ ب}$

فإن : $\overline{هـ ء}$ // $\overline{ب حـ}$



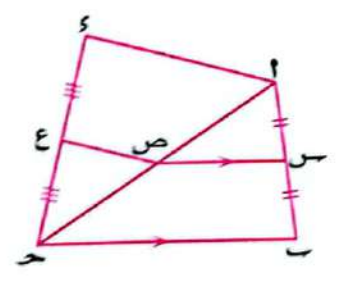
مثال ٢

فى الشكل المقابل :

س منتصف $\overline{أ ب}$ ، $\overline{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$

، ع منتصف $\overline{ء حـ}$

أثبت أن : $\overline{ص ع}$ // $\overline{أ ء}$



الحل

المعطيات | س منتصف أب ، س ص // ب حـ ، ع منتصف ء حـ

المطلوب | إثبات أن : ص ع // أء

البرهان | فى Δ أ ب حـ :

∵ س منتصف أب ، س ص // ب حـ

∴ ص منتصف أحـ (نظرية)

، فى Δ أ حـ ء :

∵ ص منتصف أحـ (إثباتًا)

، ع منتصف ء حـ (معطى)

∴ ص ع // أء (نتيجة) (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ١

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، م نقطة تقاطع قطريه

، رُسم م هـ // ب حـ ويقطع أب فى هـ

أكمل خطوات الحل لإثبات أن : هـ منتصف أب

المعطيات | ....

المطلوب | ....

البرهان | ∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع ∴ م منتصف ....

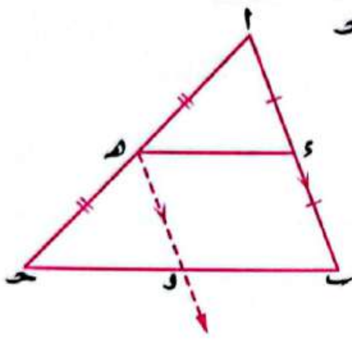
، فى Δ أ ب حـ :

∵ م منتصف .... ، .... // ....

∴ .... (نظرية) (وهو المطلوب)

نظرية ٣

طول القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث يساوى نصف طول الضلع الثالث.



المعطيات | ا ب حـ مثلث ، ء منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ا حـ}}$

المطلوب | إثبات أن : ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

العمل | نرسم $\overleftarrow{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ا ب}}$ ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى و

البرهان | ∵ ء منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ا حـ}}$

∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ (نتيجة)

، ∵ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ا ب}}$ (عملاً) ، هـ منتصف $\overline{\text{ا حـ}}$

∴ و منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ∴ ب و = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

، ∵ الشكل ء هـ و ب متوازى أضلاع.

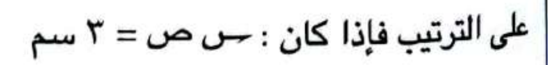
∴ ء هـ = ب و = $\frac{١}{٢}$ ب حـ (وهو المطلوب)

مثال ٣

فى الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث فيه : س ، ص ، ع منتصفات $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ا}}$

على الترتيب فإذا كان : س ص = ٣ سم



، ص ع = ٥ سم ، ع س = ٦ سم

أوجد : محيط Δ ا ب حـ



الحل

المعطيات | ا ب حـ مثلث فيه : س ، ص ، ع منتصفات $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ا}}$ على الترتيب

، س ص = ٣ سم ، ص ع = ٥ سم ، ع س = ٦ سم

المطلوب | إيجاد : محيط Δ ا ب حـ

البرهــان في Δ ؟ ب حـ : ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ، ع منتصف $\overline{أحـ}$

∴ س ع = $\frac{1}{2}$ ب حـ (نظرية)

∴ ب حـ = ٦ × ٢ = ١٢ سم

وبالمثل : ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{ب حـ}$

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ أحـ ∴ أحـ = ٣ × ٢ = ٦ سم

، ∵ ص منتصف $\overline{ب حـ}$ ، ع منتصف $\overline{أحـ}$

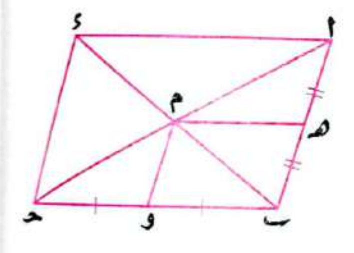
∴ ص ع = $\frac{1}{2}$ أب ∴ أب = ٥ × ٢ = ١٠ سم

∴ محيط Δ أب حـ = أب + ب حـ + حـ أ

= ١٠ + ١٢ + ٦ = ٢٨ سم (وهو المطلوب)

مثال ٤

في الشكل المقابل :



أب حـ ء متوازي أضلاع فيه : $\overline{أحـ} \cap \overline{ب ء}$ = {م}

، هـ منتصف $\overline{أب}$ ، و منتصف $\overline{ب حـ}$

أثبت أن : الشكل هـ ب و م متوازي أضلاع.

الحــل

المعطيات أب حـ ء متوازي أضلاع ، هـ منتصف $\overline{أب}$ ، و منتصف $\overline{ب حـ}$

المطلــوب إثبات أن : الشكل هـ ب و م متوازي أضلاع.

البرهــان ∵ أب حـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م

∴ م منتصف كل من $\overline{أحـ}$ ، $\overline{ب ء}$

∴ في Δ أب حـ : ∵ هـ منتصف $\overline{أب}$ ، م منتصف $\overline{أحـ}$

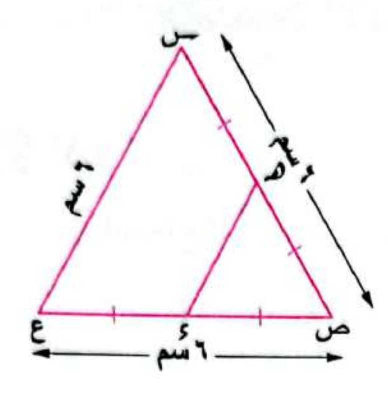
∴ $\overline{هـ م}$ // $\overline{ب حـ}$ ∴ $\overline{هـ م}$ // $\overline{ب و}$

، هـ م = $\frac{1}{2}$ ب حـ (نظرية) ∴ هـ م = ب و

∴ الشكل هـ ب و م متوازي أضلاع. (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ٢

في الشكل المقابل :



س ص ع مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٦ سم

، ء منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{س ص}}$

أكمل البرهان التالى لإثبات أن :

Δ هـ ص ء متساوى الأضلاع وأوجد محيطه.

المعطيات ....

المطلوب ....

البرهان ∵ ء منتصف .... ∴ ص ء = ... سم (١)

، ∵ هـ منتصف .... ∴ ص هـ = ... سم (٢)

، في Δ س ص ع : ∵ ء منتصف .... ، هـ منتصف ....

∴ ء هـ = $\frac{1}{2}$ .... = ... سم (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ Δ هـ ص ء ....

، محيط Δ هـ ص ء = ... سم (وهو المطلوب)

تمارين 6

على نظرية ٢ ونتيجتها ونظرية ٣






اختبار تفاعلى

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

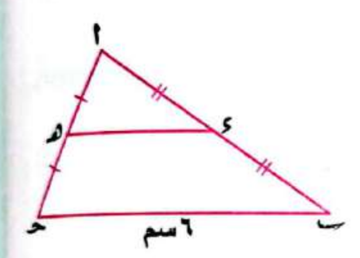
١ أكمل ما يأتى :

١ الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى المثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين ....

٢ القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث .... الضلع الثالث.

٣ طول القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث يساوى ....

٤ فى الشكل المقابل :

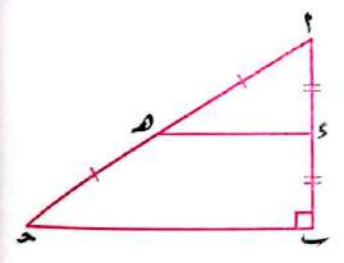


إذا كان : ء ، هـ منتصفى $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب

، ب حـ = ٦ سم

فإن : ء هـ = ... سم

٥ فى الشكل المقابل :

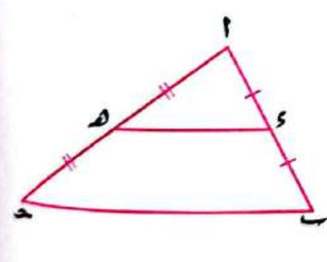


إذا كان : ق (∠ب) = ٩٠°

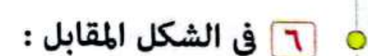
، ء ، هـ منتصفى $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب

فإن : ق (∠ أ ء هـ) = ...°

٦ فى الشكل المقابل :



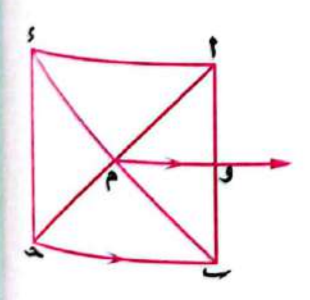
إذا كان : ء ، هـ منتصفى $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب



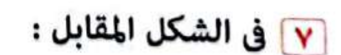
وكان محيط Δ أ ب حـ = ٢٤ سم

فإن محيط Δ أ ء هـ = ... سم

٧ فى الشكل المقابل :



إذا كان محيط المربع أ ب حـ ء = ٢٠ سم



، $\overrightarrow{مو}$ // $\overline{حـب}$ حيث و ∈ $\overline{أب}$

فإن : أ و = ... سم

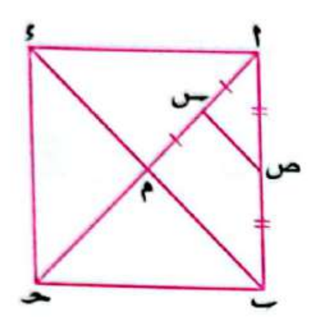
٨ في الشكل المقابل :

∵ أ ب حـ ء معين محيطه = ٢٤ سم

، هـ منتصف $\overline{أب}$

∴ م هـ = ... سم

٩ في الشكل المقابل :



∵ أ ب حـ ء مربع ، س ، ص منتصفا $\overline{أم}$

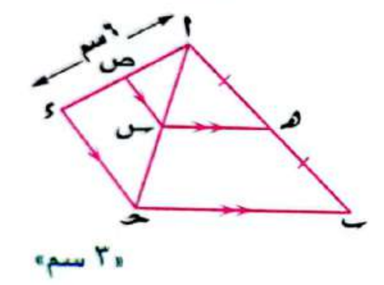
، $\overline{أب}$ على الترتيب، أ حـ = ١٢ سم

∴ س ص = ... سم

، ق (∠ أ ص س) = ...°

---

٢ في الشكل المقابل :



أ هـ = هـ ب ، $\overline{هـ س}$ // $\overline{ب حـ}$

، $\overline{س ص}$ // $\overline{حـ ء}$ ، أ ء = ٦ سم

أوجد : طول $\overline{أ ص}$

« ٣ سم »

---

٣ في الشكل المقابل :

س منتصف $\overline{ء حـ}$ ، ع منتصف $\overline{أ ب}$

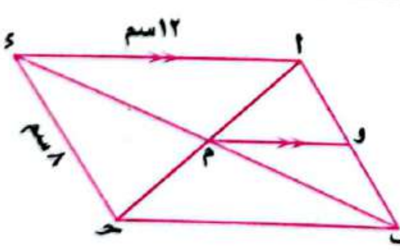
، $\overline{س ص}$ // $\overline{حـ ب}$ ، ق (∠ أ ء ب) = ٤٠°

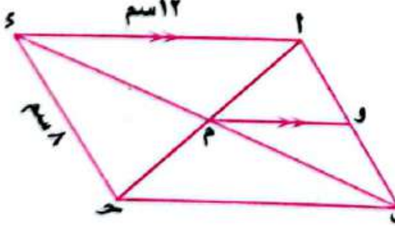
أوجد : ق (∠ ع ص ب)

« ٤٠° »

---

٤ في الشكل المقابل :





أ ب حـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م

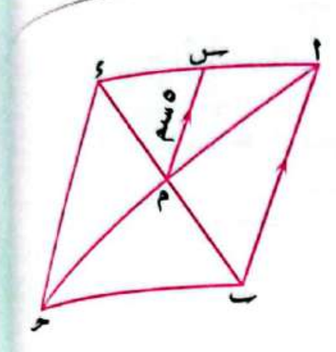
، رسم $\overleftrightarrow{م و}$ // $\overline{أ ء}$ فقطع $\overline{أ ب}$ في و

فإذا كان : أ ء = ١٢ سم ، ء حـ = ٨ سم فأوجد :

١ محيط متوازي الأضلاع أ ب حـ ء　　**٢** طول $\overline{أ و}$

« ٤٠ سم ، ٤ سم »

٥ في الشكل المقابل :



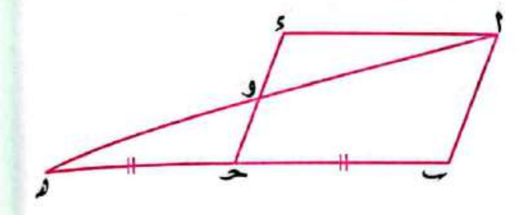
أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م

، رسم $\overleftarrow{م س}$ // $\overline{ب أ}$ ويقطع $\overline{أ ء}$ فى س

١ أثبت أن : س منتصف $\overline{أ ء}$

٢ إذا كان : م س = ٥ سم فأوجد : طول $\overline{حـ ء}$ «١٠ سم»

٦ في الشكل المقابل :

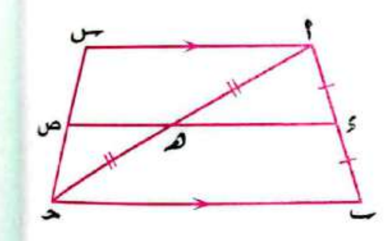


أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، ب حـ = حـ هـ

، هـ ∈ $\overleftarrow{ب حـ}$ ، رسمت $\overline{أ هـ}$ فقطعت $\overline{ء حـ}$ فى و

أثبت أن : أ و = و هـ

٧ في الشكل المقابل :

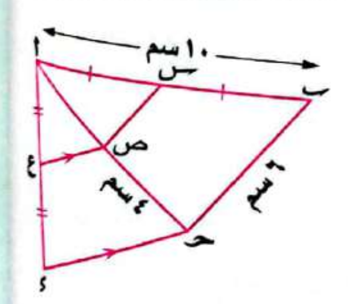


أ ء = ء ب ، أ هـ = هـ حـ

، $\overline{أ س}$ // $\overline{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ء هـ}$ ∩ $\overline{س حـ}$ = {ص}

أثبت أن : ص منتصف $\overline{س حـ}$

٨ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى فيه :

س ، ع منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ء}$ على الترتيب

، ص ∈ $\overline{أ حـ}$ بحيث $\overline{ص ع}$ // $\overline{حـ ء}$ ، ص حـ = ٤ سم

فإذا كان : ب حـ = ٦ سم ، أ ب = ١٠ سم فأوجد :

١ طول $\overline{أ ص}$ ٢ محيط Δ أ س ص «٤ سم ، ١٢ سم»

٩ 📖 **فى الشكل المقابل :**

أب = ٥ سم ، ب‌حـ = ٨ سم

، حـ أ = ٧ سم

، ء ، هـ ، و منتصفات $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب‌حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ أ}}$ على الترتيب

احسب : محيط Δ ء هـ و «١٠ سم»

---

١٠ **فى الشكل المقابل :**

س ص ع مثلث فيه :

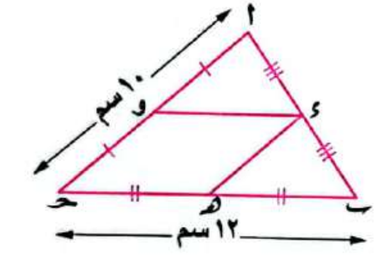
هـ ، و ، ز منتصفات $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{ع س}}$ على الترتيب

فإذا كان محيط Δ هـ و ز = ١٨ سم

فأوجد : محيط Δ س ص ع «٣٦ سم»

---

١١ 📖 **فى الشكل المقابل :**



أب‌حـ مثلث فيه :

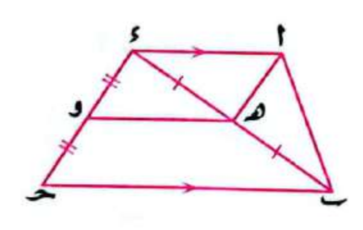
ء ، هـ ، و منتصفات $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب‌حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ أ}}$ على الترتيب

، ب‌حـ = ١٢ سم ، أحـ = ١٠ سم

أوجد : محيط الشكل ء هـ حـ و «٢٢ سم»

---

١٢ 📖 **فى الشكل المقابل :**

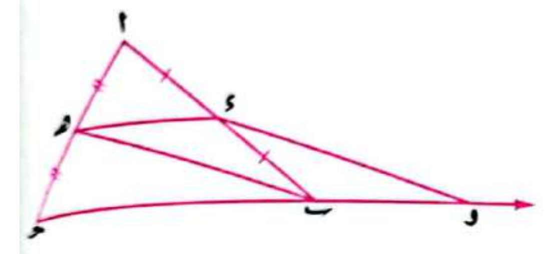


$\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب‌حـ}}$ ، أء = $\frac{1}{2}$ ب‌حـ

، هـ منتصف $\overline{\text{ءب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ءحـ}}$

أثبت أن : الشكل أ هـ و ء متوازى أضلاع.

١٣ في الشكل المقابل :



ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ على الترتيب

، و ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ حيث ب و = $\frac{1}{2}$ ب حـ

أثبت أن : الشكل ب هـ ء و متوازى أضلاع.

---

١٤ في الشكل المقابل :

ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{ءو}}$ ∩ $\overline{\text{ب حـ}}$ = {س}

، ء س = س و ، ب حـ = ١٢ سم

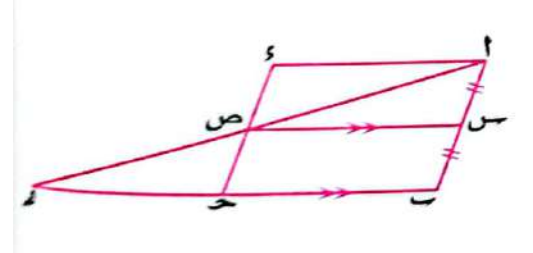
أوجد : طول $\overline{\text{س ص}}$

(٣ سم)

---

١٥ في الشكل المقابل :





أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، س منتصف $\overline{\text{أب}}$

، رسم $\overleftarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ فقطع $\overline{\text{ء حـ}}$ في ص

، رسم $\overleftarrow{\text{أص}}$ فقطع $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ في هـ

أثبت أن : حـ منتصف $\overline{\text{ب هـ}}$

---

١٦ في الشكل المقابل :

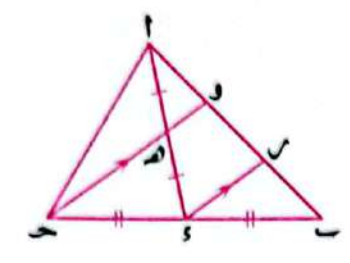
أ ب حـ مثلث ، ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

، و ∈ $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ بحيث هـ حـ = حـ و

أثبت أن : حـ و = $\frac{1}{3}$ أ و ثم إذا رسمت $\overline{\text{ءو}}$ فقطعت $\overline{\text{ب حـ}}$ في س

فاثبت أن : و س = س ء

١٧ **فى الشكل المقابل :**



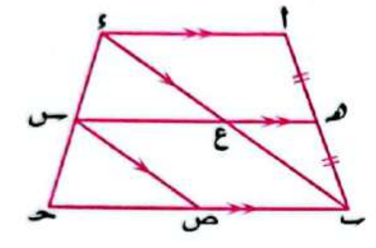
أ ب حـ مثلث ، ء منتصف ب حـ ، هـ منتصف أ ء

، رسم حـ هـ فقطع أ ب فى و ثم رسم ء ر // حـ و

فقطع أ ب فى ر **أثبت أن :** أ و = و ر = ر ب

---

١٨ **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء شبه منحرف فيه :

أ ء // ب حـ ، هـ منتصف أ ب

، هـ س // ب حـ ، س ص // ء ب

أثبت أن : ص منتصف ب حـ

---

١٩ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أ ء // ب حـ ، هـ منتصف أ ب ، رسم هـ س // ب حـ

ويقطع ء ب فى س ، ء حـ فى ص ، ورسم ص ع // ء ب يقطع ب حـ فى ع

أثبت أن : س ء = ص ع

---

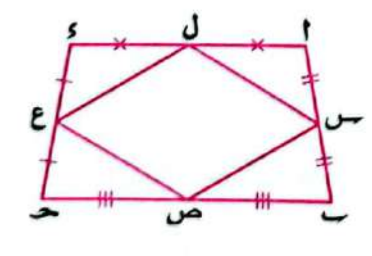
٢٠ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٩ سم ، أ حـ = ٨ سم ، ء ∈ أ ب ، هـ ∈ أ ب بحيث

أ ء = ء هـ = هـ ب ، رسم ء س ، هـ ص يوازيان ب حـ ويقطعان أ حـ فى س ، ص

على الترتيب بحيث ء س = ٤ سم احسب : محيط الشكل ء هـ ص س « $\frac{٢}{٣}$ ١٧ سم »

---

٢١ **فى الشكل المقابل :**



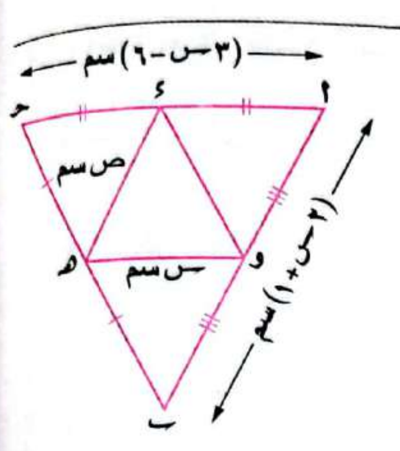
أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : س ، ص ، ع ، ل منتصفات

أ ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء أ على الترتيب

أثبت أن : الشكل س ص ع ل متوازى أضلاع.

٢٢ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، س ، ص ، ع منتصفات $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ على الترتيب

برهن أن : أ س ص ع معين.

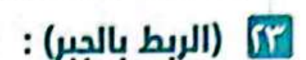


٢٣ **(الربط بالجبر) :**

في الشكل المقابل :

أوجد : قيمة كل من س ، ص

«٦ سم ، ٦,٥ سم»



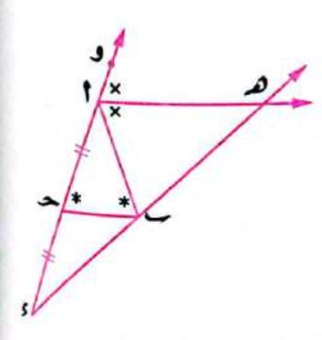
تطبيق حياتى



٢٤ أرادت سارة تصميم طائرة ورقية طولا قطريها ٦٤ سم ، ٩٠ سم ، وتريد وضع شريط لتزيين الطائرة يصل بين منتصفات أضلاع الطائرة فما طول هذا الشريط ؟

«١٥٤ سم»

للمتفوقين



٢٥ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ حـ ب)

، ء ∈ $\overleftarrow{أ حـ}$ بحيث أ حـ = حـ ء

، و ∈ $\overleftarrow{حـ أ}$ ، نصفت ∠ ب أ و بالمنصف $\overrightarrow{أ هـ}$ قابل $\overleftrightarrow{ء ب}$ في هـ

أثبت أن : ب منتصف $\overline{ء هـ}$

الدرس 7

نظرية فيثاغورث



فى الشكل المقابل :

* إذا كان : أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى أ فيه :

أ ب = ٤ وحدة طول ، أ ح = ٣ وحدة طول ، ب ح = ٥ وحدة طول فإن :

- مساحة المربع المنشأ على $\overline{أب}$
تساوى (أ ب)^{٢} = ١٦ وحدة مربعة.
- مساحة المربع المنشأ على $\overline{أح}$
تساوى (أ ح)^{٢} = ٩ وحدة مربعة.
- مساحة المربع المنشأ على $\overline{بح}$
تساوى (ب ح)^{٢} = ٢٥ وحدة مربعة.

ح

٣ وحدة طول

٥ وحدة طول

٤ وحدة طول

ب

أ

أى أن :

مساحة المربع المنشأ على $\overline{بح}$ تساوى مجموع مساحتى المربعين المنشأين على $\overline{أب}$ ، $\overline{أح}$

أو بمعنى آخر :

(ب ح)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (أ ح)^{٢}

* والصياغة اللفظية لما توصلت إليه مما سبق هى ما عُرفت بـ «نظرية فيثاغورث».

نظرية فيثاغورث

فى المثلث القائم الزاوية مساحة المربع المنشأ على الوتر تساوى مجموع مساحتى المربعين المنشأين على ضلعى القائمة.


فيثاغورث
(٥٨٢ - ٥٠١ ق.م)

ويمكن صياغة هذه النظرية بصورة أخرى كالتالى :

فى المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى ضلعى القائمة.

أى أنه إذا كان : أ ب ح مثلثًا قائم الزاوية فى أ فإن :

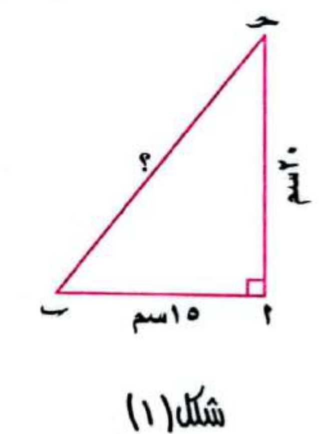
$$(ب ح)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (أ ح)^{٢}$$

ومن العلاقة السابقة يمكن استنتاج العلاقتين الآتيتين :

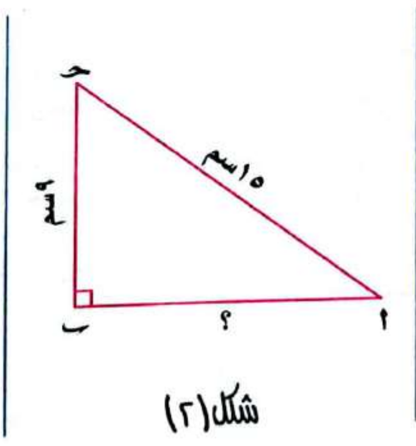
$$(أ ب)^{٢} = (ب ح)^{٢} - (أ ح)^{٢} \quad ، \quad (أ ح)^{٢} = (ب ح)^{٢} - (أ ب)^{٢}$$

مثال ١

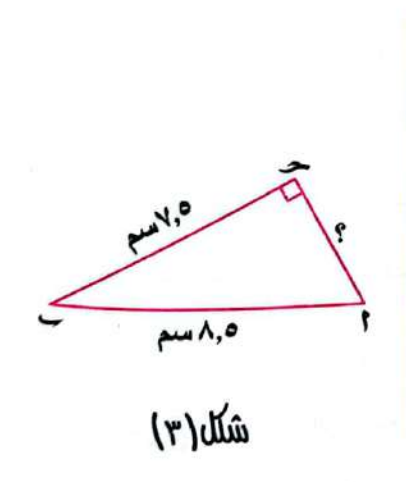
فى كل من الأشكال الآتية أوجد طول الضلع المشار إليه بالعلامة (؟) :



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

الحل

شكل(١) : $\because$ Δ أ ب ح قائم الزاوية فى أ

$\therefore$ $(ب ح)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (أ ح)^{٢} = (١٥)^{٢} + (٢٠)^{٢} = ٢٢٥ + ٤٠٠ = ٦٢٥$

$\therefore$ ب ح $= \sqrt{٦٢٥} = ٢٥$ سم

شكل(٢) : ∵ Δ أب حـ قائم الزاوية فى ب

∴ (أب)^{٢} = (أحـ)^{٢} − (ب حـ)^{٢} = (١٥)^{٢} − (٩)^{٢} = ٢٢٥ − ٨١ = ١٤٤

∴ أب = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

شكل(٣) : ∵ Δ أب حـ قائم الزاوية فى حـ

∴ (أحـ)^{٢} = (أب)^{٢} − (ب حـ)^{٢} = (٨,٥)^{٢} − (٧,٥)^{٢} = ٧٢,٢٥ − ٥٦,٢٥ = ١٦

∴ أحـ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ سم



حاول بنفسك ١

فى الشكل المقابل :

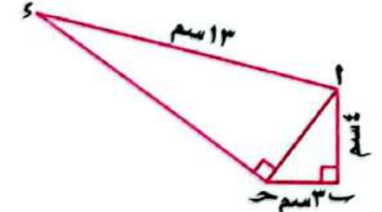
أب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ

أكمل الجدول التالى :

أب	٨ سم	١٢ سم	١٢ سم	٢٠ سم	....	....
أحـ	٦ سم	٩ سم	....	....	١٢ سم	٤,٥ سم
ب حـ	....	....	١٣ سم	٢٥ سم	٢٠ سم	٧,٥ سم

مثال ٢

فى الشكل المقابل :



أب حـ ء شكل رباعى فيه : ق (∠ب) = ق (∠أحـ ء) = ٩٠°

، أب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم ، أء = ١٣ سم

أوجد : طول كل من $\overline{أحـ}$ ، $\overline{حـ ء}$

الحـــل

المعطيات | ق (∠ب) = ق (∠أحـ ء) = ٩٠°

، أب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم ، أء = ١٣ سم

المطلــوب | إيجاد : طول كل من $\overline{أحـ}$ ، $\overline{حـ ء}$

البرهــان ∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

∴ $(أحـ)^2 = (أب)^2 + (ب حـ)^2$ (فيثاغورث)

∴ $(أحـ)^2 = (٤)^2 + (٣)^2 = ١٦ + ٩ = ٢٥$

∴ أحـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم (المطلوب أولًا)

، ∵ Δ أ حـ ء قائم الزاوية فى حـ

∴ $(حـ ء)^2 = (أ ء)^2 - (أحـ)^2$ (فيثاغورث)

$= (١٣)^2 - (٥)^2 = ١٦٩ - ٢٥ = ١٤٤$

∴ حـ ء = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم (المطلوب ثانيًا)

مثال ٣

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

، $\overline{ب ء} \perp \overline{أحـ}$ ، أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم

أوجد : طول $\overline{ب ء}$



الحــل

المعطيات ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، $\overline{ب ء} \perp \overline{أحـ}$ ، أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم

المطلــوب إيجاد : طول $\overline{ب ء}$

البرهــان ∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

∴ $(أحـ)^2 = (أب)^2 + (ب حـ)^2$ (فيثاغورث)

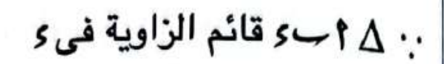
∴ $(أحـ)^2 = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠$ ∴ أحـ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم

، ∵ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ × أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم^2

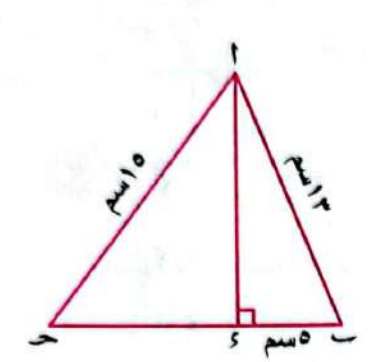
، ∵ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أحـ × ب ء

∴ ٢٤ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ب ء ∴ ٢٤ = ٥ × ب ء

∴ ب ء = $\frac{٢٤}{٥}$ = ٤,٨ سم (وهو المطلوب)



في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ١٣ سم ، أ حـ = ١٥ سم

، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ب ء = ٥ سم

أكمل البرهان التالي لإيجاد : طول $\overline{\text{ء حـ}}$

∵ Δ أ ب ء قائم الزاوية في ء

∴ $(\text{أ ء})^2 = (\text{أ ب})^2 - (\ \ldots\ldots\ )^2 = (\ \ldots\ldots\ )^2 - (\ \ldots\ldots\ )^2 = \ldots\ldots$

∴ أ ء = $\sqrt{\ldots\ldots}$ = ………… سم

، ∵ Δ أ ء حـ قائم الزاوية في ء

∴ $(\text{ء حـ})^2 = (\ \ldots\ldots\ )^2 - (\text{أ ء})^2 = (\ \ldots\ldots\ )^2 - (\ \ldots\ldots\ )^2 = \ldots\ldots$

∴ ء حـ = $\sqrt{\ldots\ldots}$ = ………… سم (وهو المطلوب)

إجابات حاول بنفسك

١ • أ ب = ١٦ سم ، أ ب = ٦ سم

• أ حـ = ٥ سم ، أ حـ = ١٥ سم

• ب حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ١٥ سم

معلومة إثرائية للاطلاع فقط

يمكنك الحصول على ثلاثة أعداد تمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية كما يلى :

① إذا كان : م عدد زوجى أكبر من ٢ فإن الأعداد : $م ، \left(\frac{م}{٢}\right)^{٢} - ١ ، \left(\frac{م}{٢}\right)^{٢} + ١$

تمثل ثلاثة أطوال لأضلاع مثلث قائم الزاوية كما يتضح من الجدول التالى :

م	$\left(\frac{م}{٢}\right)^{٢} - ١$	$\left(\frac{م}{٢}\right)^{٢} + ١$	أطوال أضلاع المثلث القائم
٤	$\frac{١٦}{٤} - ١ = ٣$	$\frac{١٦}{٤} + ١ = ٥$	٤ ، ٣ ، ٥
٦	$\frac{٣٦}{٤} - ١ = ٨$	$\frac{٣٦}{٤} + ١ = ١٠$	٦ ، ٨ ، ١٠
٨	$\frac{٦٤}{٤} - ١ = ١٥$	$\frac{٦٤}{٤} + ١ = ١٧$	٨ ، ١٥ ، ١٧
١٠	$\frac{١٠٠}{٤} - ١ = ٢٤$	$\frac{١٠٠}{٤} + ١ = ٢٦$	١٠ ، ٢٤ ، ٢٦

② إذا كان : م عدد فردى أكبر من ٢ فإن الأعداد : $م ، \frac{م^{٢} - ١}{٢} ، \frac{م^{٢} + ١}{٢}$

تمثل ثلاثة أطوال لأضلاع مثلث قائم الزاوية كما يتضح من الجدول التالى :

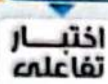
م	$\frac{م^{٢} - ١}{٢}$	$\frac{م^{٢} + ١}{٢}$	أطوال أضلاع المثلث القائم
٣	$\frac{٩ - ١}{٢} = ٤$	$\frac{٩ + ١}{٢} = ٥$	٣ ، ٤ ، ٥
٥	$\frac{٢٥ - ١}{٢} = ١٢$	$\frac{٢٥ + ١}{٢} = ١٣$	٥ ، ١٢ ، ١٣
٧	$\frac{٤٩ - ١}{٢} = ٢٤$	$\frac{٤٩ + ١}{٢} = ٢٥$	٧ ، ٢٤ ، ٢٥
٩	$\frac{٨١ - ١}{٢} = ٤٠$	$\frac{٨١ + ١}{٢} = ٤١$	٩ ، ٤٠ ، ٤١

تمارين 7

على نظرية فيثاغورث

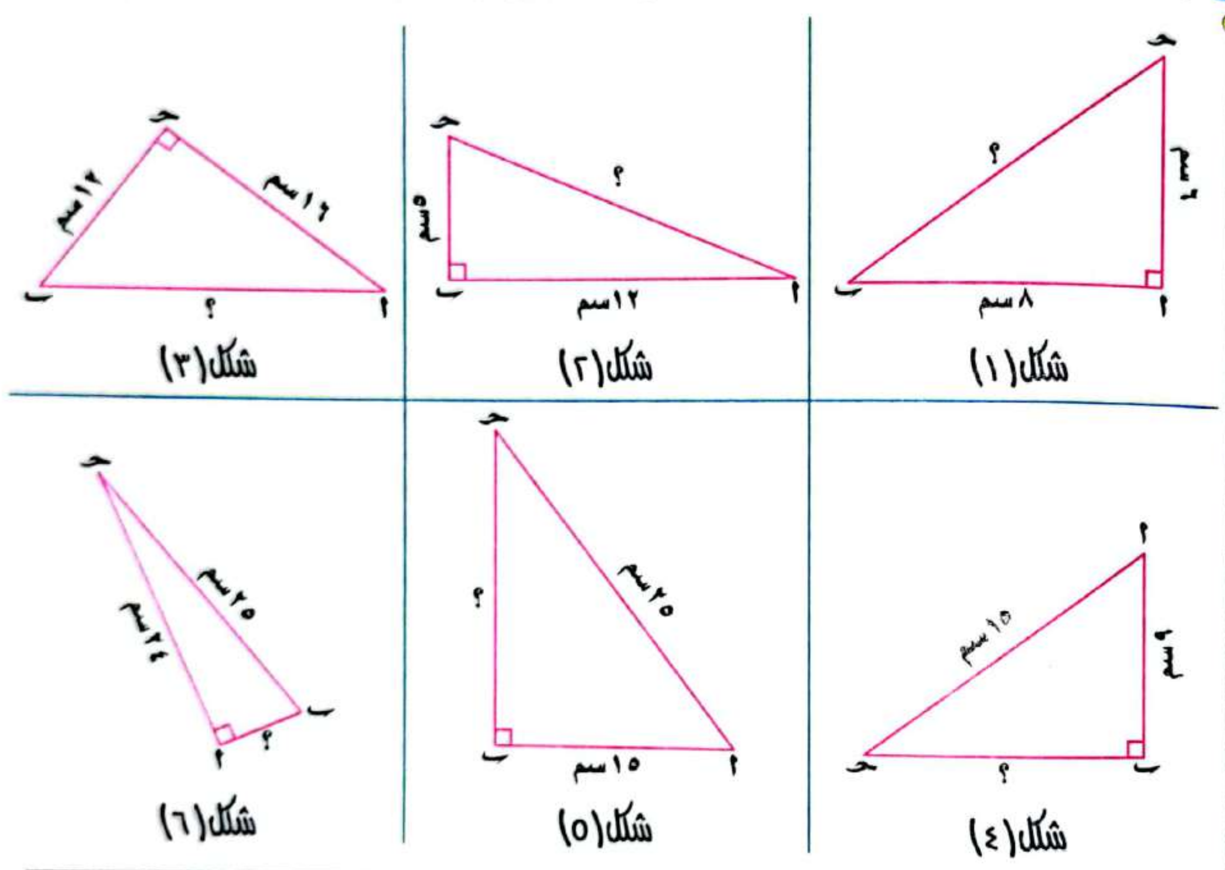




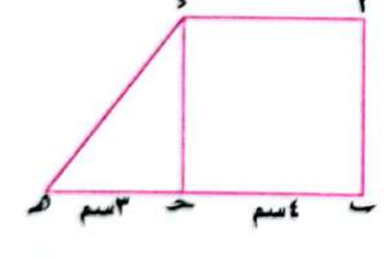


• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ فى كل من الأشكال التالية أوجد طول الضلع المشار إليه بالعلامة (؟) :



٢ فى الشكل المقابل :



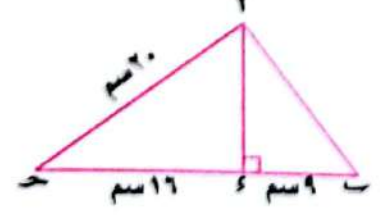
أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٤ سم

، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ بحيث حـ هـ = ٣ سم

أوجد : طول $\overline{\text{ء هـ}}$

«٥ سم»

٣ فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، ب ء = ٩ سم

، ء حـ = ١٦ سم ، أ حـ = ٢٠ سم



أوجد : [١] أ ء [٢] أ ب [٣] مساحة Δ أ ب حـ



«١٢ سم ، ١٥ سم ، ١٥٠ سم²»

٤ في الشكل المقابل :

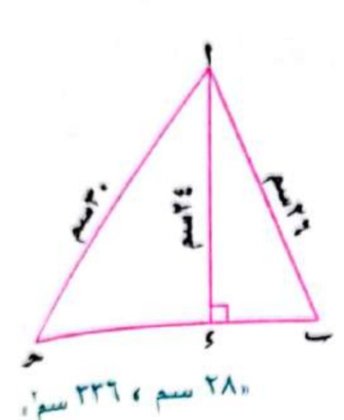
أ ب حـ مثلث فيه : $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$

فإذا كان : أ ء = ٢٤ سم

، أ ب = ٢٦ سم ، أ حـ = ٣٠ سم

أوجد : ب حـ

واحسب : مساحة المثلث أ ب حـ



«٢٨ سم ، ٣٣٦ سم²»

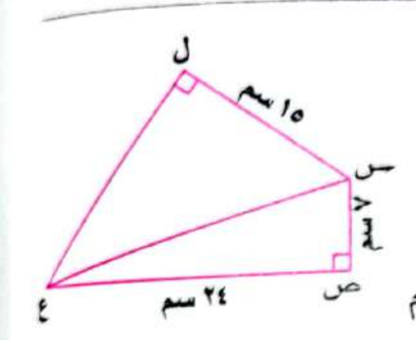
٥ في الشكل المقابل :

س ص ع ل شكل رباعي فيه :

ق (∠ س ص ع) = ق (∠ س ل ع) = ٩٠°

، س ص = ٧ سم ، ص ع = ٢٤ سم ، س ل = ١٥ سم

أوجد طول كل من : $\overline{س ع}$ ، $\overline{ل ع}$



«٢٥ سم ، ٢٠ سم»

٦ في الشكل المقابل :

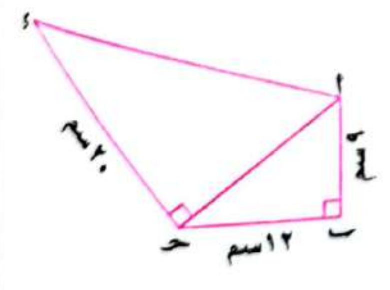
ق (∠ ب) = ق (∠ أ حـ ء) = ٩٠°

، أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم

، ء حـ = ٢٠ سم

أوجد : ١ طول $\overline{أ حـ}$ ٢ طول $\overline{أ ء}$

٣ محيط الشكل أ ب حـ ء ٤ مساحة الشكل أ ب حـ ء



«١٥ سم ، ٢٥ سم ، ٦٦ سم ، ٢٠٤ سم²»

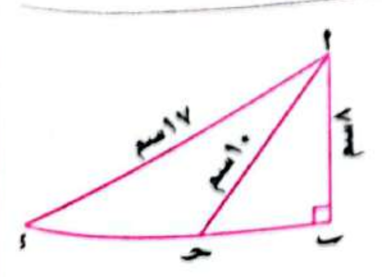
٧ في الشكل المقابل :

أ ب ء مثلث قائم الزاوية في ب فيه :

أ ب = ٨ سم ، أ ء = ١٧ سم ، حـ ∈ $\overline{ب ء}$

بحيث أ حـ = ١٠ سم

أوجد طول كل من : $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ب ء}$ ، $\overline{حـ ء}$



«٦ سم ، ١٥ سم ، ٩ سم»

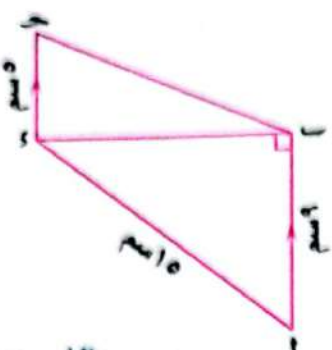
٨ في الشكل المقابل :

ق(∠ أ ب ء) = ٩٠° ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$

، أ ب = ٩ سم ، أ ء = ١٥ سم

، ء حـ = ٥ سم

احسب : طول $\overline{\text{ب حـ}}$



«١٣ سم»

٩ في الشكل المقابل :

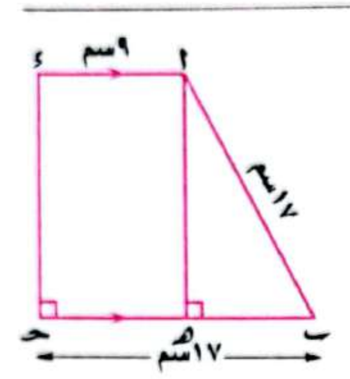
أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

، ق(∠ ء حـ ب) = ٩٠° ، $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

، أ ب = ب حـ = ١٧ سم ، أ ء = ٩ سم

أوجد : طول $\overline{\text{ء حـ}}$

واحسب : مساحة شبه المنحرف.



«١٥ سم ، ١٩٥ سم^2»

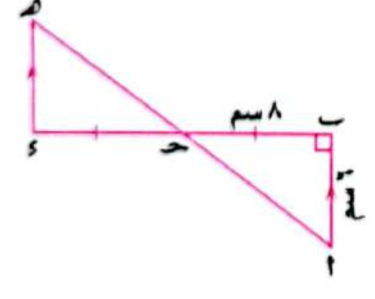
١٠ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{ب ء}} \cap \overline{\text{أ هـ}}$ = {حـ} ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$

، أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم

، حـ منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

احسب : طول $\overline{\text{حـ هـ}}$



«١٠ سم»

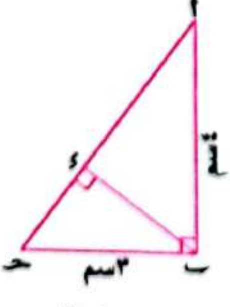
١١ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب

، $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$ ، أ ب = ٤ سم

، ب حـ = ٣ سم

أوجد : طول $\overline{\text{ب ء}}$



«٢,٤ سم»

١٢ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ب) = ٩٠° ، $\overline{أهـ} // \overline{ب حـ}$

فإذا كان : ب حـ = ١٢ سم ، أ حـ = ٢٠ سم ، ء ∈ $\overline{أ ب}$

حيث ب ء = ٩ سم ، أ هـ = ٢ ب حـ

أوجد طول كل من : $\overline{أ ء}$ ، $\overline{هـ ء}$

«٧ سم ، ٢٥ سم»

---

١٣ أكمل ما يأتي :

١ في المثلث القائم الزاوية تكون مساحة المربع المنشأ على الوتر تساوي ....

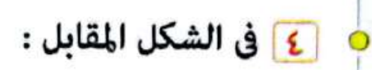
٢ إذا كان : س ص ع مثلثاً قائم الزاوية في س ، س ص = ١٢ سم

، س ع = ٩ سم فإن : ص ع = ... سم

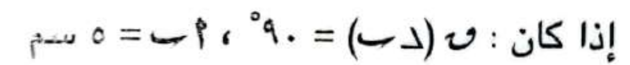
٣ إذا كان : أ ب حـ مثلثاً قائم الزاوية في ب

وكان : أ ب = ٢٠ سم ، أ حـ = ٢٥ سم

فإن : ب حـ = ... سم



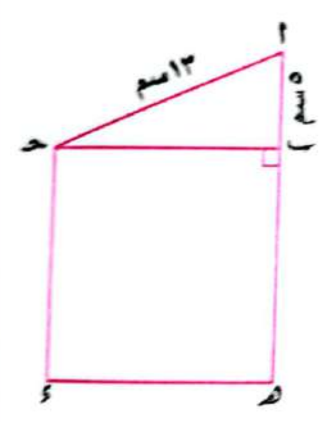
٤ في الشكل المقابل :



إذا كان : ق (∠ب) = ٩٠° ، أ ب = ٥ سم

، أ حـ = ١٣ سم

فإن مساحة المربع ب هـ ء حـ = ... سم^2



٥ مستطيل طوله ٨ سم وعرضه ٦ سم فإن طول قطره يساوي .... سم

٦ إذا كانت مساحة مستطيل تساوي ٦٠ سم^2 وعرضه ٥ سم فإن طول قطره يساوي .... سم



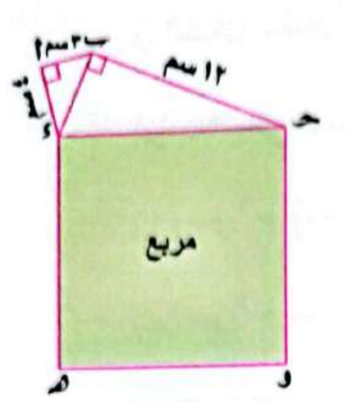
٧ في الشكل المقابل :

إذا كان : Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

فإن : طول ضلع المربع المظلل = ... سم



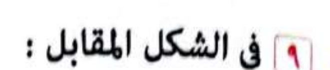
٨ في الشكل المقابل :



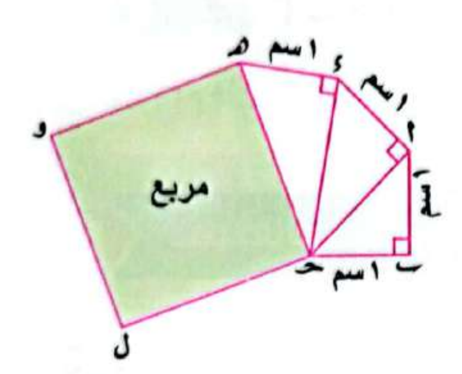
إذا كان : Δ أ ب ء قائم الزاوية في أ

، Δ ب حـ ء قائم الزاوية في ب

فإن مساحة المربع المظلل = ... سم^{٢}



٩ في الشكل المقابل :



إذا كانت المثلثات أ ب حـ ، أ حـ ء ، ء حـ هـ

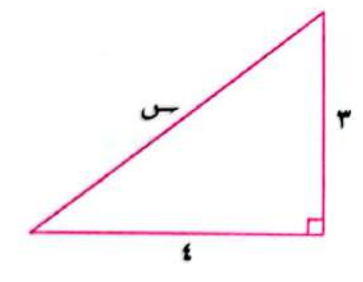
قائمة الزوايا في ب ، أ ، ء على الترتيب

، أ ب = ب حـ = أ ء = ء هـ = ١ سم

فإن مساحة المربع المظلل = ... سم^{٢}

١٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ في الشكل المقابل :



أى مما يأتى يمثل علاقة رياضية صحيحة ؟

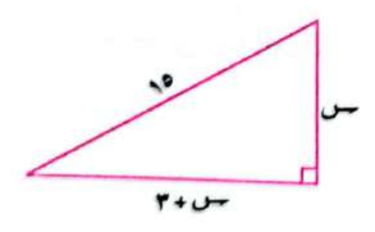
(أ) س = (٤)^{٢} + (٣)^{٢}

(ب) س^{٢} = (٤)^{٢} − (٣)^{٢}

(جـ) س^{٢} + ٩ = ١٦

(د) س^{٢} = ٢٥

٢ في الشكل المقابل :



أى مما يأتى يمثل علاقة رياضية صحيحة ؟

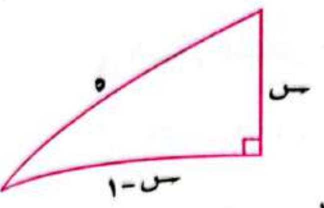
(أ) س + ٣ + س = ١٥

(ب) س^{٢} + ٣ س = ١٠٨

(جـ) (س + ٣)^{٢} = ١٥ − س^{٢}

(د) س^{٢} + ٦ س + ٩ = ٢٢٥

[٣] في الشكل المقابل :



أي مما يأتي يمثل علاقة رياضية صحيحة ؟

(أ) $س^٢ + (س - ١)^٢ = ٥$ (ب) $س + (س - ١) = ٢٥$

(جـ) $س^٢ - س = ١٢$ (د) $(س - ١)^٢ - س^٢ = ٢٥$

[٤] إذا كان : أ ب حـ ء مربعًا فإن : $(أ حـ)^٢ = ...$

(أ) أ ب (ب) $(أ ب)^٢$ (جـ) $٢ (أ ب)^٢$ (د) $٤ (أ ب)^٢$

تطبيقات حياتية



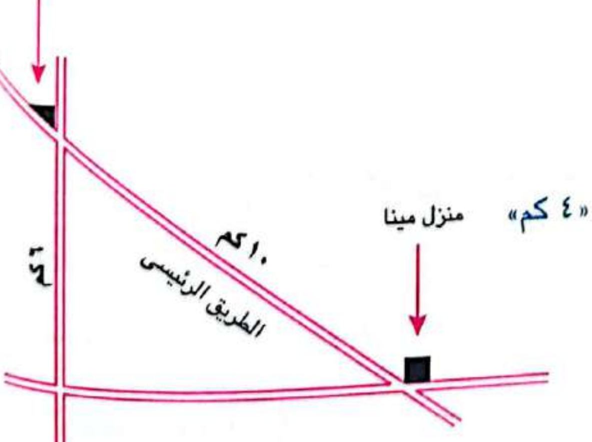
١٥ يقوم عامل بتنظيف شباك باستخدام سلم طوله ٥ أمتار ، يسند العامل السلم على الحائط بحيث تكون قمة السلم على ارتفاع ٤ أمتار من الأرض.

ما بُعد الحائط عن قاعدة السلم ؟ «٣ م»

١٦ أراد مينا الذهاب من منزله إلى منزل صديقه باسم.

ما المسافة التي يوفرها إذا سلك الطريق الرئيسي بدلًا من الطريقين الآخرين ؟

«٤ كم»



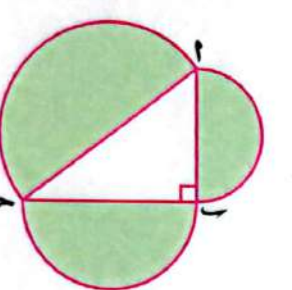
للمتفوقين

١٧ إذا كان : أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية فى ب ، ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : $(\text{أ حـ})^2 - (\text{أ ء})^2 = 3\ (\text{ب ء})^2$

---

١٨ فى الشكل المقابل :



أثبت أن مجموع مساحتى نصفى الدائرتين المرسومتين على ضلعى القائمة فى المثلث القائم الزاوية يساوى مساحة نصف الدائرة المرسومة على الوتر.

[علمًا بأن : مساحة الدائرة = π نق^2]

الدرس 8 التحويلات الهندسية



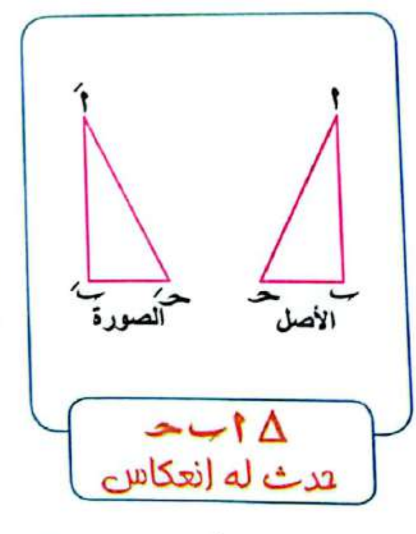
فى هذا الدرس سوف نتعرف على معنى التحويلة الهندسية، كما سنتعرف سريعًا على ثلاثة أنواع منها، وهى :

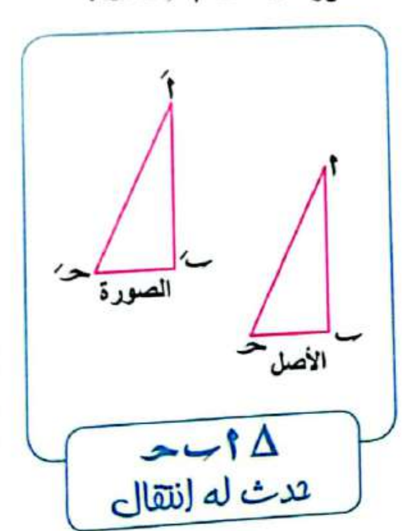
١ الانعكاس. ٢ الانتقال. ٣ الدوران.

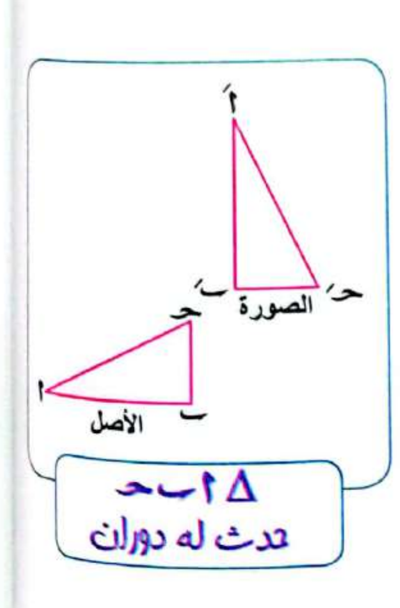
وسوف ندرس كلًا منها بالتفصيل فى الدروس القادمة.

مفهوم التحويلة الهندسية

★ فى كل من الأشكال الآتية لاحظ صورة المثلث أ ب ح :







فى كل من الأشكال السابقة لاحظ أن :

النقطة أ تتحول إلى أَ ، النقطة ب تتحول إلى بَ ، النقطة ح تتحول إلى حَ

وهكذا كل نقاط Δ أ ب ح تتحول إلى وضع آخر فيقال إن Δ أ ب ح تحول من وضع إلى آخر.

مما سبق نستنتج أنه :

إذا تحركت كل نقاط الشكل الهندسى طبقًا لنظام محدد فإننا نحصل على صورة أخرى فى وضع جديد لنفس الشكل الهندسى فيقال إن هذا الشكل تحت تأثير تحويلة هندسية.
أى أن : **التحويلة الهندسية تحول كل نقطة ن فى المستوى إلى نقطة نَ فى نفس المستوى.**

مثال

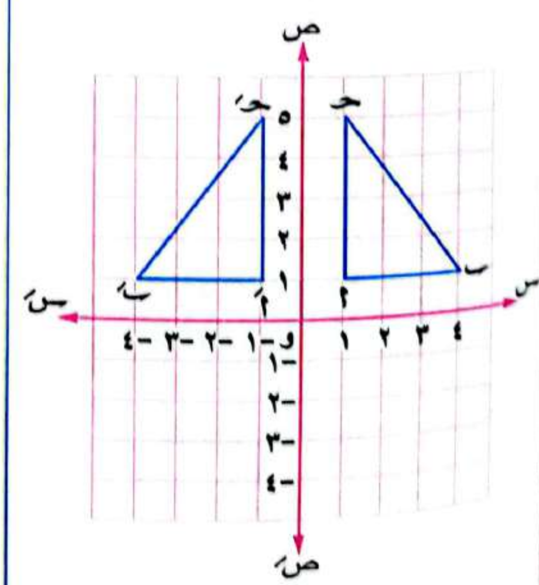
ارسم صورة المثلث أ ب حـ حيث أ (١ ، ١) ، ب (٤ ، ١) ، حـ (١ ، ٥) حسب كل من التحويلات الهندسية الآتية وصِفْ نوعها :

١ (س ، ص) ⟵ (– س ، ص) ٢ (س ، ص) ⟵ (– ص ، س)

٣ (س ، ص) ⟵ (س ، ص – ٥)

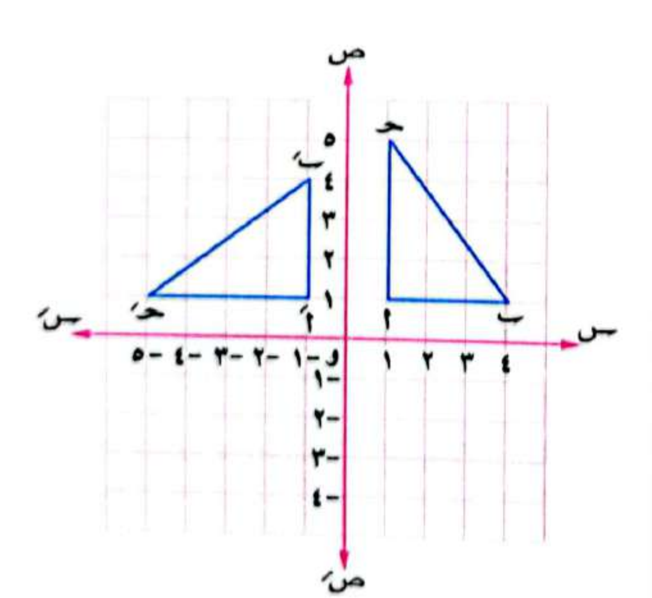
الحـــل

١ • أ (١ ، ١) $\xrightarrow{(-س ، ص)}$ أَ (–١ ، ١)
• ب (٤ ، ١) $\xrightarrow{(-س ، ص)}$ بَ (–٤ ، ١)
• حـ (١ ، ٥) $\xrightarrow{(-س ، ص)}$ حـَ (–١ ، ٥)



نوع التحويلة : انعكاس

٢ • أ (١ ، ١) $\xrightarrow{(-ص ، س)}$ أَ (–١ ، ١)
• ب (٤ ، ١) $\xrightarrow{(-ص ، س)}$ بَ (–١ ، ٤)
• حـ (١ ، ٥) $\xrightarrow{(-ص ، س)}$ حـَ (–٥ ، ١)



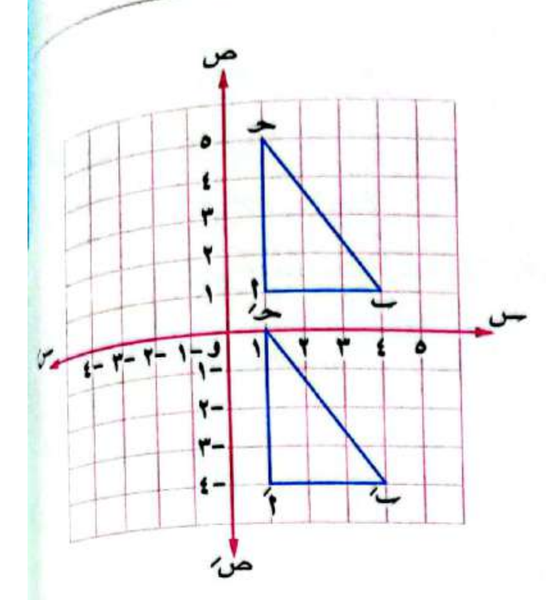
نوع التحويلة : دوران

٣ • أ (١ ، ١) $\xrightarrow{(س ، ص - ٥)}$ أَ (١ ، -٤)

• ب (٤ ، ١) $\xrightarrow{(س ، ص - ٥)}$ بَ (٤ ، -٤)

• حـ (١ ، ٥) $\xrightarrow{(س ، ص - ٥)}$ حَ (١ ، ٠)

نوع التحويلة : انتقال

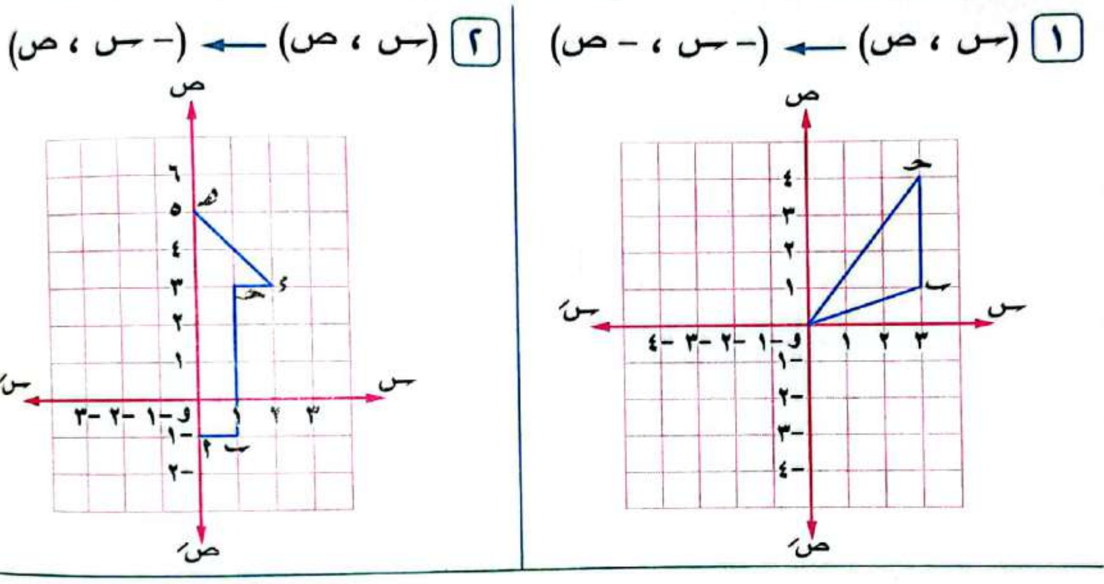


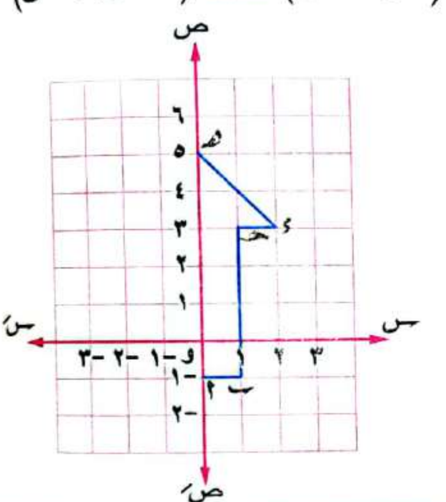
حاول بنفسك

ارسم صورة كل شكل من الأشكال الآتية حسب التحويلة الهندسية ثم صف نوعها :

١ (س ، ص) ⟵ (- س ، - ص)

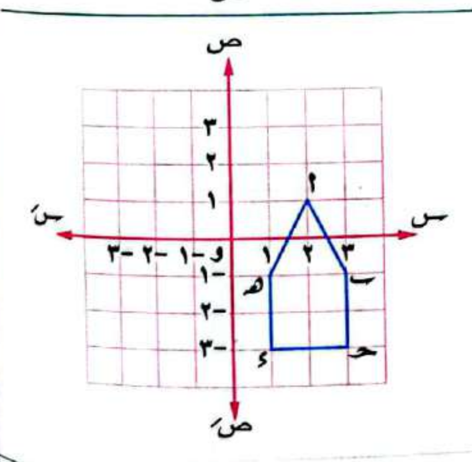
٢ (س ، ص) ⟵ (- س ، ص)

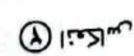




٣ (س ، ص) ⟵ (س ، ص + ٢)





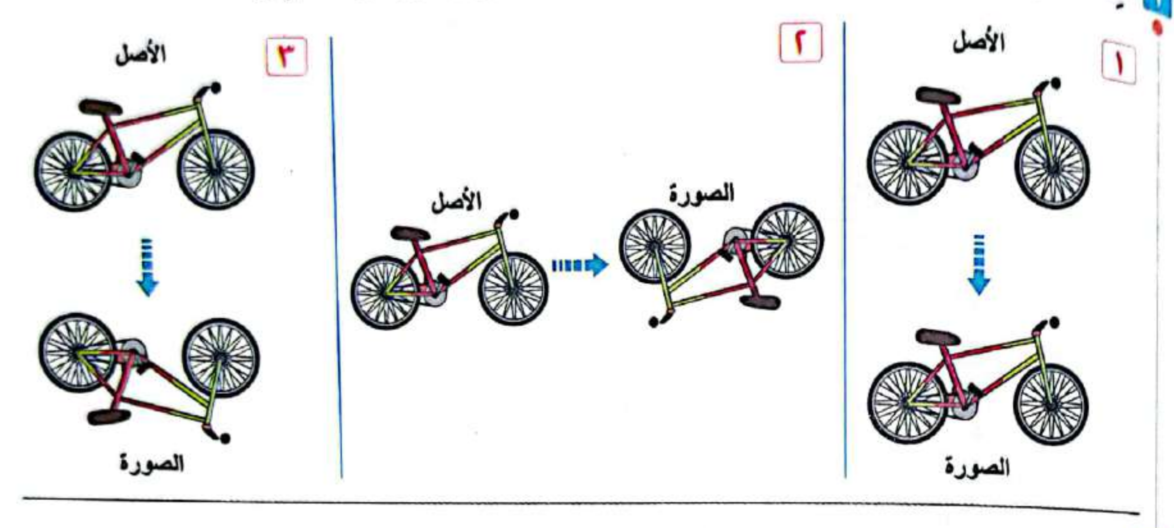


تمارين 8
على التحويلات الهندسية

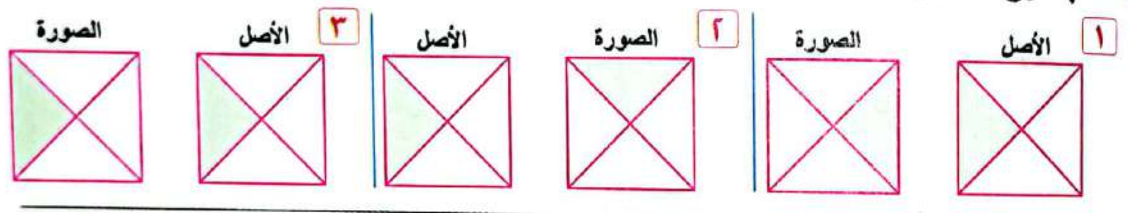


• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

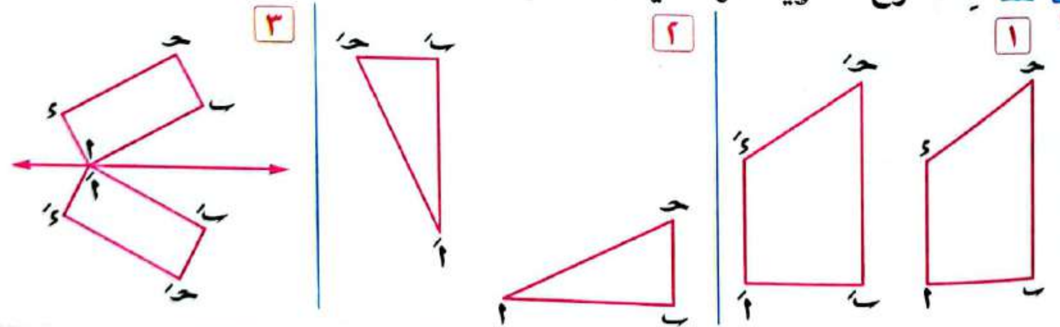
١ صِفْ نوع التحويلة الهندسية (انعكاس - انتقال - دوران) فى كل مما يأتى :



٢ اكتب نوع التحويلة الهندسية (انعكاس - انتقال - دوران) :

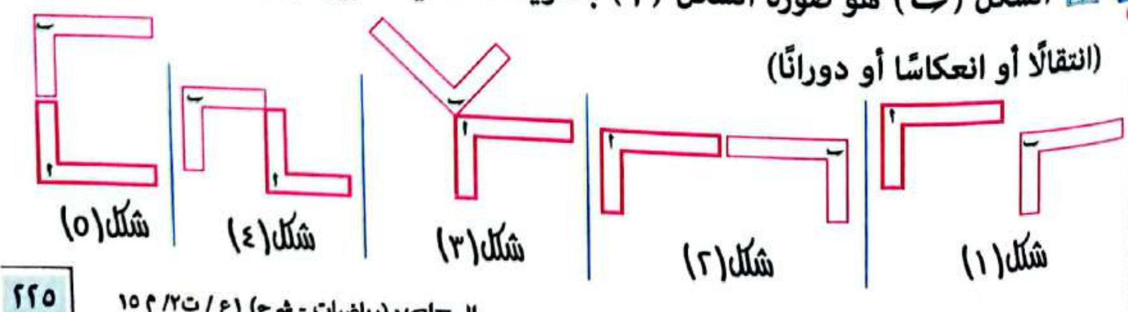


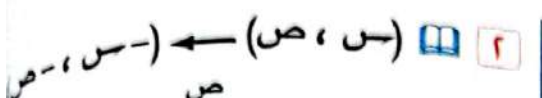
٣ صِفْ نوع التحويلة الهندسية (انعكاس - انتقال - دوران) فى كل شكل مما يلى :



٤ الشكل (ب) هو صورة الشكل (أ) بتحويلة هندسية ، بين نوعها فى كل حالة :

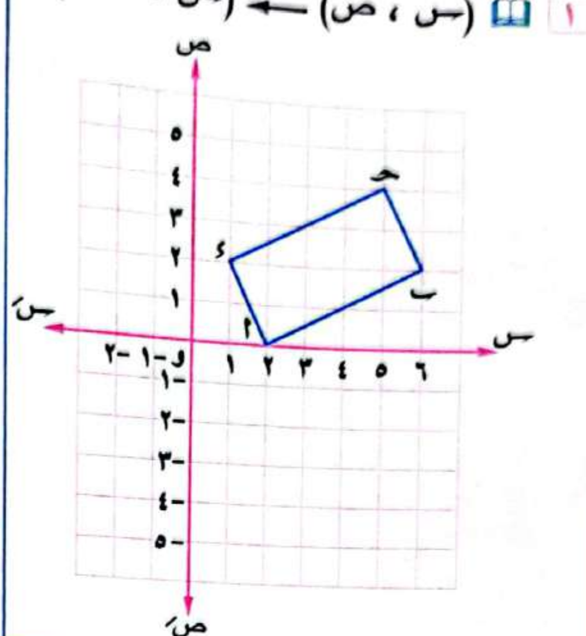
(انتقالًا أو انعكاسًا أو دورانًا)



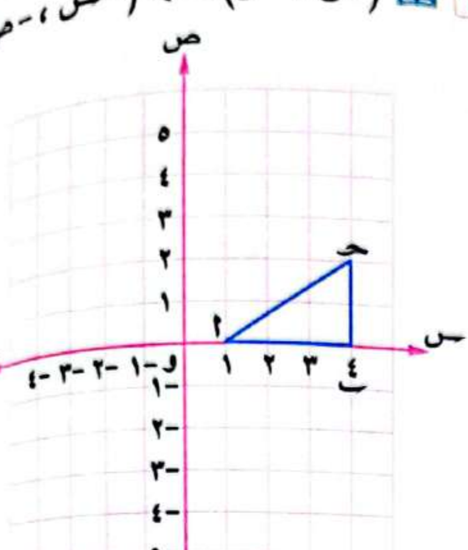


٥ ارسم صورة كل شكل من الأشكال الآتية حسب التحويلة الهندسية الموضحة ثم صف نوعها:

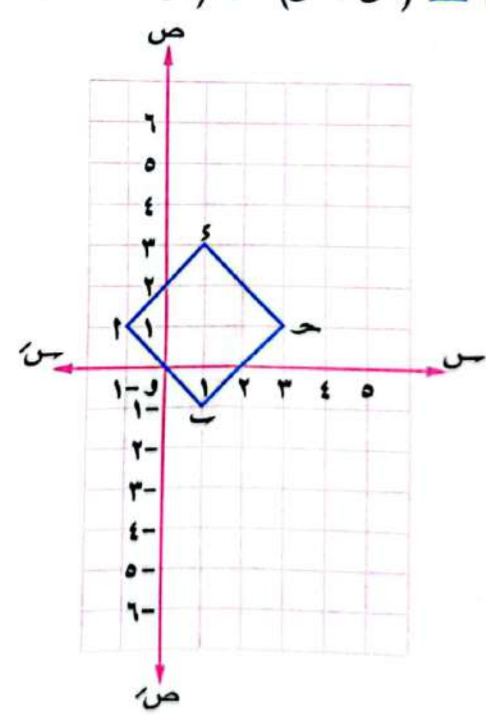
١ (س ، ص) ⟵ (س ، − ص)



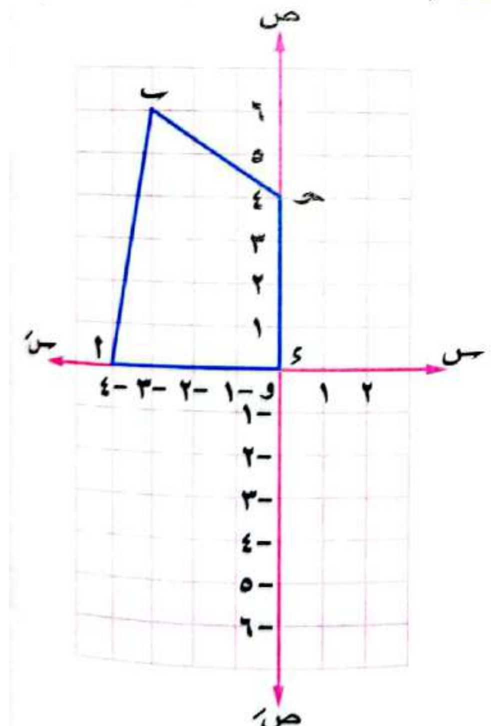
٢ (س ، ص) ⟵ (− س ، − ص)



٣ (س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص + ٣)



٤ (س ، ص) ⟵ (ص ، − س)



٦ ارسم صورة Δ ا ب حـ حيث : ا (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (٣ ، ٥) بكل من التحويلات الهندسية الآتية :

١ (س ، ص) ⟵ (س ، − ص)

٢ (س ، ص) ⟵ (س + ١ ، ص − ٣)

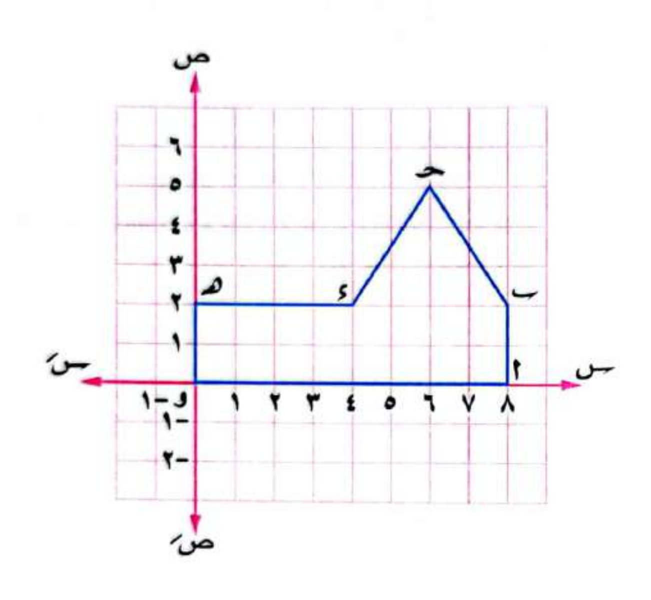
٣ (س ، ص) ⟵ (− ص ، س)

---

٧ ارسم صورة المضلع ا ب حـ ء هـ و

حسب التحويلة الهندسية الموضحة

ثم صِفْ نوعها :



١ (س ، ص) ⟵ (− س ، ص)

٢ (س ، ص) ⟵ (س ، ص + ٥)

٣ (س ، ص) ⟵ (− س ، − ص)

٤ (س ، ص) ⟵ (س − ٥ ، ص)

٥ (س ، ص) ⟵ (س ، − ص)

للمتفوقين

٨ ارسم Δ ا ب حـ الذى صورته اَ بَ حَ بالتحويلة الهندسية (س ، ص) ⟵ (− ص ، س)
حيث اَ (١ ، −١) ، بَ (٣ ، ١) ، حَ (٤ ، −١) ثم صف نوع التحويلة.

الدرس 9 الانعكاس فى مستقيم



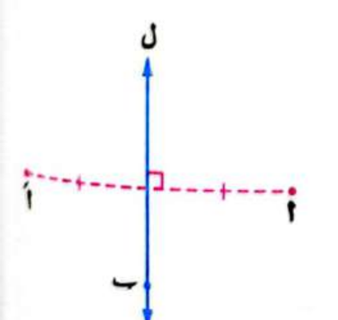
تمهيد



إذا وقفت مباشرة أمام مرآة مستوية ، فإنك ترى صورتك منعكسة فى المرآة بنفس الحجم والتفاصيل، وسوف تلاحظ أن بُعد الصورة عن المرآة يساوى نفس بُعدك الحقيقى عن المرآة فإذا اقتربت من المرآة تجد أن صورتك أيضًا تقترب منها.

تعريف الانعكاس فى مستقيم

الانعكاس فى مستقيم ل يحول كل نقطة أ إلى النقطة أَ فى نفس المستوى بحيث :



1 إذا كانت : أ $\not\in$ المستقيم ل

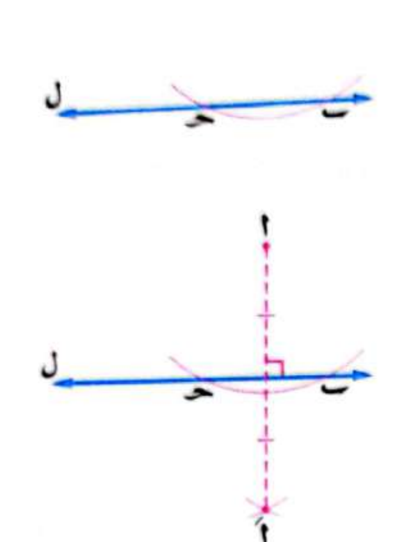
فإن : المستقيم ل هو المنصف العمودى للقطعة المستقيمة $\overline{\text{أأَ}}$

2 إذا كانت : ب $\in$ المستقيم ل

فإن : ب تنعكس على نفسها أى أن : بَ تنطبق على ب

إيجاد صورة نقطة بالانعكاس فى مستقيم معلوم

* لإيجاد أَ صورة أ بالانعكاس فى المستقيم ل نتبع ما يلى :



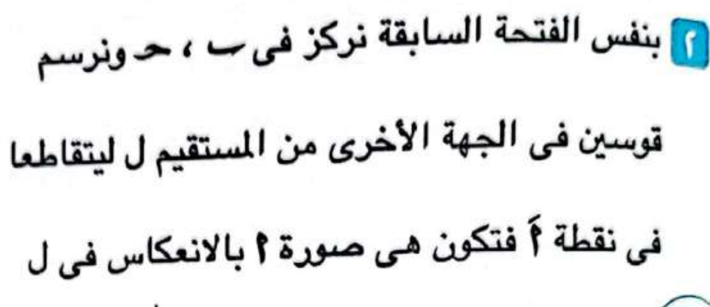
1 ارسم قوسًا من دائرة مركزها نقطة أ

يقطع ل فى النقطتين ب ، ح

2 بنفس الفتحة السابقة نركز فى ب ، ح ونرسم

قوسين فى الجهة الأخرى من المستقيم ل ليتقاطعا

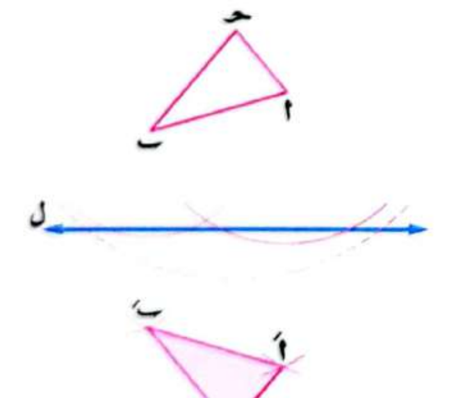
فى نقطة أَ فتكون هى صورة أ بالانعكاس فى ل



• تحقق بالقياس أن : $\overline{أأَ}$ ⊥ ل ، ل ينصف $\overline{أأَ}$

إيجاد صورة مضلع بالانعكاس فى مستقيم معلوم

* لإيجاد صورة مضلع وليكن △ أ ب ح بالانعكاس فى المستقيم ل نتبع ما يلى :



1 نوجد صورة كل رأس من رؤوس △ أ ب ح

بالانعكاس فى المستقيم ل كما ذكرنا سابقًا ولتكن

أَ صورة أ ، بَ صورة ب ، حَ صورة ح

2 نرسم $\overline{أَبَ}$ ، $\overline{بَحَ}$ ، $\overline{حَأَ}$ فيكون △ أَبَحَ

هو صورة △ أ ب ح بالانعكاس فى المستقيم ل

• تحقق بالقياس أن :

* أ ب = أَ بَ ، ب ح = بَ حَ ، ح أ = حَ أَ   △ أ ب ح ≡ △ أَ بَ حَ

* ق (∠ أ) = ق (∠ أَ) ، ق (∠ ب) = ق (∠ بَ) ، ق (∠ ح) = ق (∠ حَ)

مما سبق نستنتج أن :

الانعكاس هو «تحويلة هندسية» تحول الشكل الهندسى إلى شكل هندسى آخر مطابق له

(أى : متساوى معه فى أطوال أضلاعه وقياسات زواياه) بينما يختلف معه فى اتجاه قراءة الشكل.

لاحظ أن : قراءة Δ أ ب حـ تسير فى اتجاه دوران عقارب الساعة

بينما قراءة Δ أَ بَ حَ تسير فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة

خواص الانعكاس فى مستقيم

مثال توضيحى

ارسم صورة المستطيل أ ب حـ ء الذى فيه : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٢ سم بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{أب}$

الحل

أولاً :

نرسم المستطيل أ ب حـ ء الذى فيه :

أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٢ سم

حـ ء ٢سم ب ٤سم أ حَ ءَ

ثانيًا :

لإيجاد صورة المستطيل أ ب حـ ء

بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{أب}$ نتبع ما يلى :

١ صورة أ ، صورة ب بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{أب}$ هما نفسهما لأنهما تنتميان إليه.

٢ نوجد صورة ء بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{أب}$ ولتكن ءَ ، صورة حـ بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{أب}$ ولتكن حَ

فنحصل على المستطيل أ ب حَ ءَ ليكون هو صورة المستطيل أ ب حـ ء بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{أب}$

لاحظ أن :

١ $أء = أءَ$ ، $ءحـ = ءَحـَ$ ، $حـب = حـَب$ ، $\overline{أب}$ ضلع مشترك	أى أن	الانعكاس فى مستقيم يحافظ على أطوال القطع المستقيمة.
٢ ق $(\angle ب أ ء)$ = ق $(\angle ب أ ءَ)$ ، ق $(\angle أ ب حـ)$ = ق $(\angle أ ب حـَ)$ ، ق $(\angle حـ)$ = ق $(\angle حـَ)$ ، ق $(\angle ء)$ = ق $(\angle ءَ)$	أى أن	الانعكاس فى مستقيم يحافظ على قياسات الزوايا.
٣ من المستطيل أ ب حـ ء : $\overline{أء} // \overline{ب حـ}$ ، من المستطيل أ ب حـَ ءَ : $\overline{أءَ} // \overline{ب حـَ}$ ∴ صورتا قطعتين مستقيمتين متوازيتين هما قطعتان مستقيمتان متوازيتان أيضًا.	أى أن	الانعكاس فى مستقيم يحافظ على التوازى.
٤ قراءة المستطيل أ ب حـ ء تسير فى اتجاه دوران عقارب الساعة بينما قراءة المستطيل أ ب حـَ ءَ تسير فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.	أى أن	الانعكاس فى مستقيم لا يحافظ على الاتجاه الدورانى لترتيب رؤوس الشكل.
٥ إذا أخذت نقطة تقع على $\overline{ءحـ}$ ووجدت صورتها بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{أب}$ ستجد أن صورتها تقع على $\overline{ءَحـَ}$	أى أن	الانعكاس فى مستقيم يحافظ على البينية.

خداع بصرى

انظر إلى الصورة ... ماذا ترى ؟!

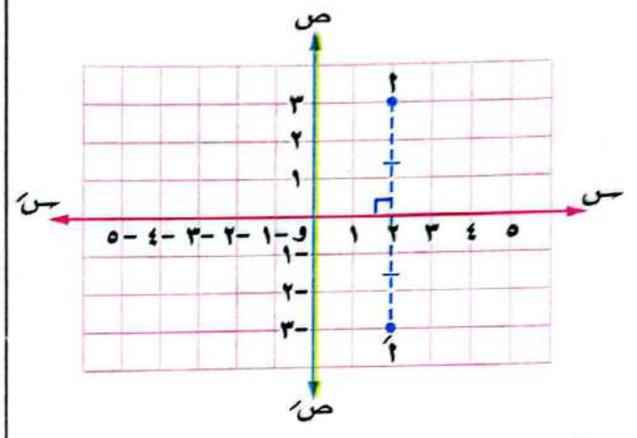


الانعكاس فى المستوى الإحداثى

الانعكاس فى محور السينات

• لإيجاد صورة النقطة أ (٢ ، ٣) بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{سس'}$ (محور السينات) :

نرسم $\overline{أأ'}$ بحيث يكون $\overleftrightarrow{سس'}$ هو محور تماثلها.



نجد أن : أ (٢ ، ٣) ⟵ أ' (٢ ، -٣)

أى أن : الانعكاس فى محور السينات يغير إشارة المسقط الثانى (الصادى)

أ (س ، ص) ⟵ بالانعكاس فى محور السينات ⟵ أ' (س ، - ص)

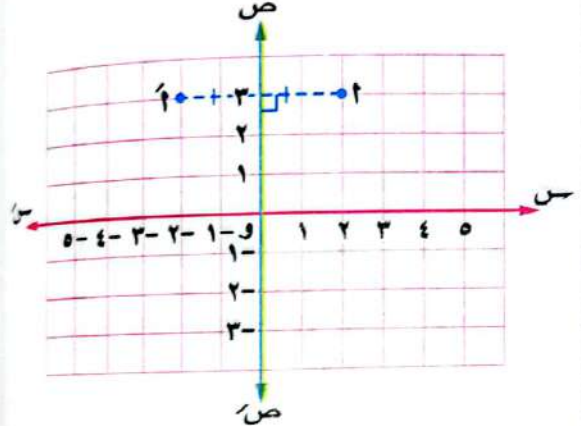
فمثلًا :

• (٢ ، ٤) ⟵ بالانعكاس فى محور السينات ⟵ (٢ ، -٤)
• (-٢ ، -١) ⟵ بالانعكاس فى محور السينات ⟵ (-٢ ، ١)
• (-٥ ، ٣) ⟵ بالانعكاس فى محور السينات ⟵ (-٥ ، -٣)
• (٧ ، -٢) ⟵ بالانعكاس فى محور السينات ⟵ (٧ ، ٢)

الانعكاس فى محور الصادات

• لإيجاد صورة النقطة أ (٢ ، ٣) بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{صص'}$ (محور الصادات) :

نرسم $\overline{أأ'}$ بحيث يكون $\overleftrightarrow{صص'}$ هو محور تماثلها.



نجد أن : أ (٢ ، ٣) ⟵ أ' (-٢ ، ٣)

أى أن : الانعكاس فى محور الصادات يغير إشارة المسقط الأول (السينى)

أ (س ، ص) ⟵ بالانعكاس فى محور الصادات ⟵ أ' (-س ، ص)

فمثلًا :

• (٢ ، ٤) ⟵ بالانعكاس فى محور الصادات ⟵ (-٢ ، ٤)
• (-٢ ، -١) ⟵ بالانعكاس فى محور الصادات ⟵ (٢ ، -١)
• (-٥ ، ٣) ⟵ بالانعكاس فى محور الصادات ⟵ (٥ ، ٣)
• (٧ ، -٢) ⟵ بالانعكاس فى محور الصادات ⟵ (-٧ ، -٢)

! ملاحظات

١ صورة النقطة (س ، ٠) بالانعكاس فى محور السينات هى نفسها لأنها واقعة على محور السينات.

فمثلًا : (٥ ، ٠) $\xrightarrow[\text{محور السينات}]{\text{بالانعكاس فى}}$ (٥ ، ٠)

٢ صورة النقطة (٠ ، ص) بالانعكاس فى محور الصادات هى نفسها لأنها واقعة على محور الصادات.

فمثلًا : (٠ ، −٣) $\xrightarrow[\text{محور الصادات}]{\text{بالانعكاس فى}}$ (٠ ، −٣)

٣ صورة النقطة (٠ ، ٠) بالانعكاس فى محور السينات وبالانعكاس فى محور الصادات هى نفسها لأنها تقع على كل من المحورين.

حاول بنفسك ١

أكمل الجدول التالى :

النقطة	(٥ ، ١)	(٢ ، −٣)	(−١ ، ٤)	(−٢ ، −٦)	(٠ ، −١)	(٣ ، ٠)	(٠ ، ٠)
صورتها بالانعكاس فى محور السينات	....	....	....	....	....	....	....
صورتها بالانعكاس فى محور الصادات	....	....	....	....	....	....	....

مثال

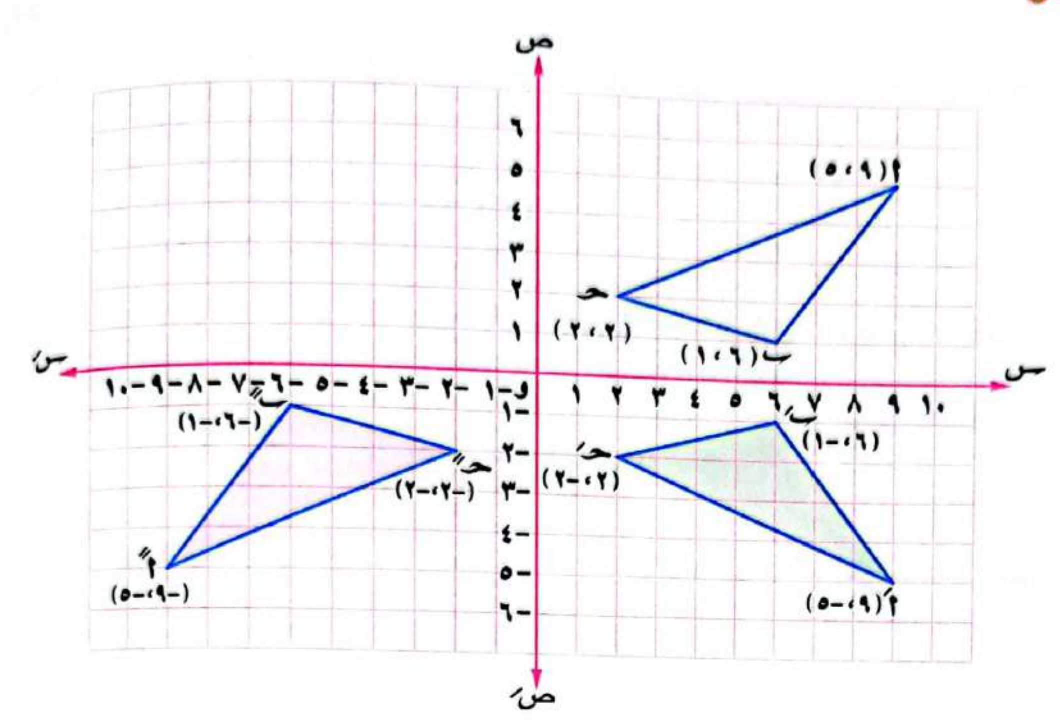
ارسم على شبكة تربيعية المثلث أ ب حـ حيث : أ (٩ ، ٥) ، ب (٦ ، ١) ، حـ (٢ ، ٢)

١ ارسم △ أَ بَ حَ صورة △ أ ب حـ بالانعكاس فى محور السينات.

٢ ارسم △ أً بً حً صورة △ أَ بَ حَ بالانعكاس فى محور الصادات.



الحل

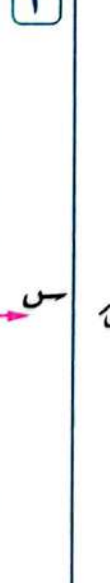


حاول بنفسك ٢

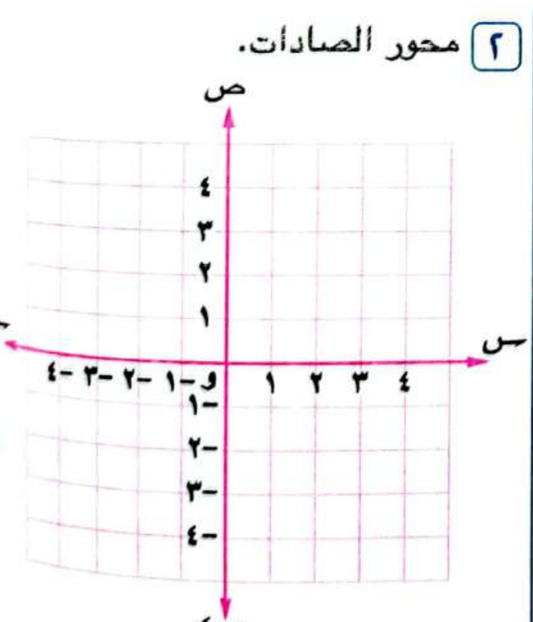
ارسم Δ أ ب حـ حيث : أ(١ ، ١) ، ب(٤ ، ١) ، حـ(٣ ، ٣)

ثم ارسم صورته بالانعكاس فى :

١ محور السينات.



٢ محور الصادات.



التماثل

فى الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث ، $\overleftrightarrow{اء} \perp \overline{ب حـ}$

، ء منتصف $\overline{ب حـ}$

نجد أن :

• صورة ا بالانعكاس فى ل هى ا (نفسها)

• صورة ب بالانعكاس فى ل هى حـ

• صورة حـ بالانعكاس فى ل هى ب

أى أن :

صورة Δ ا ب حـ بالانعكاس فى ل هو Δ ا حـ ب

ويمكن القول إن :

Δ ا ب حـ تحول إلى نفسه بالانعكاس فى المستقيم ل

ولذلك يسمى المستقيم ل محور تماثل للمثلث ا ب حـ

مما سبق نستنتج تعريف محور التماثل كالآتى :

إذا كان الانعكاس فى مستقيم يحول الشكل إلى نفسه فإن هذا المستقيم هو محور تماثل الشكل.

! ملاحظة

محور التماثل يقسم الشكل إلى شكلين متطابقين.

محاور تماثل بعض الأشكال الهندسية

الشكل	المثلث المتساوى الساقين	المثلث المتساوى الأضلاع	المثلث المختلف الأضلاع
عدد محاور تماثله	١	٣	صفر (لا يوجد)
الشكل	متوازى الأضلاع	المستطيل	المعين
عدد محاور تماثله	صفر (لا يوجد)	٢	٢
الشكل	المربع	شبه المنحرف الغير متساوى الساقين	شبه المنحرف المتساوى الساقين
عدد محاور تماثله	٤	صفر (لا يوجد)	١
الشكل	الدائرة	الخماسى المنتظم	السداسى المنتظم
عدد محاور تماثله	عدد لا نهائى	٥	٦

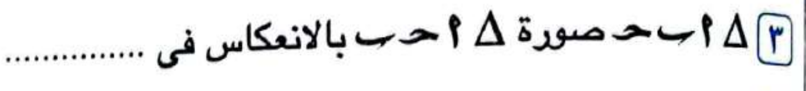


في الشكل المقابل :

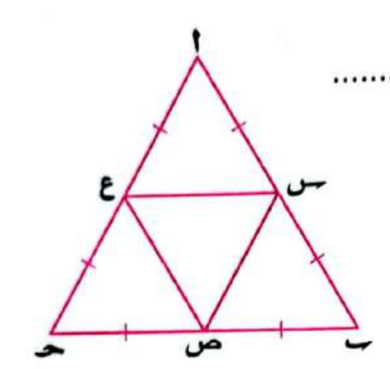
أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع ، س ، ص ، ع منتصفات أضلاعه أكمل ما يأتي :

١) صورة Δ أ س ع بالانعكاس في $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ هي ....

٢) صورة الشكل أ ع ص س بالانعكاس في $\overleftrightarrow{\text{أ ص}}$ هي ....

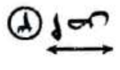


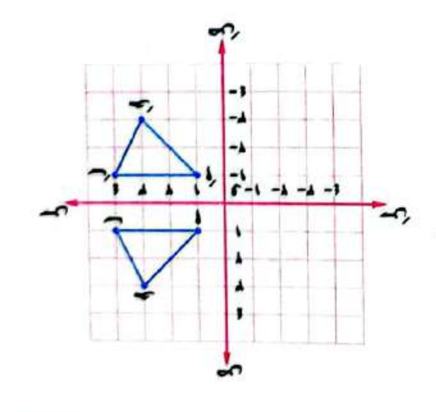
٣) Δ أ ب جـ صورة Δ أ جـ ب بالانعكاس في ....

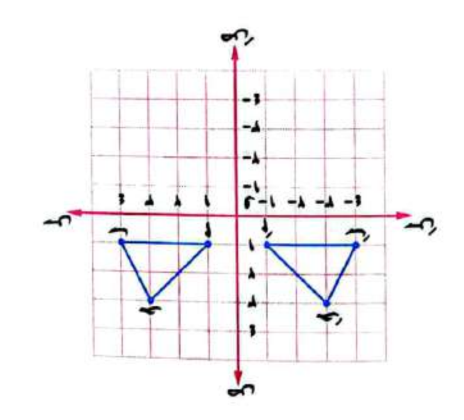


٤) عدد محاور تماثل الشكل أ ب ص ع هو ....

٥) عدد محاور تماثل Δ أ ب جـ هو ....





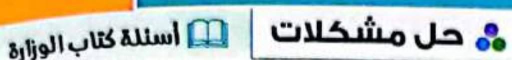






تمارين 9
على الانعكاس فى مستقيم



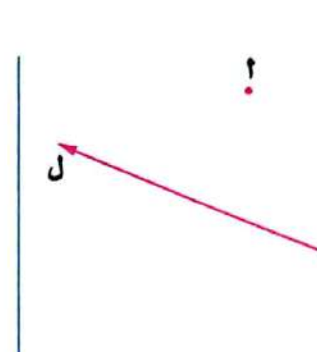



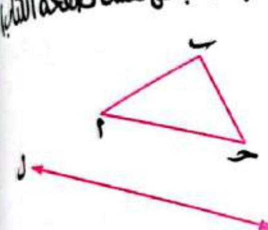

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات 📖 أسئلة كتاب الوزارة

أولاً مسائل على الانعكاس فى المستوى

١ 📖 ارسم صورة كل من : أ ، $\overline{أب}$ ، △ أ ب حـ بالانعكاس فى المستقيم ل :

(أجب فى نفس صفحة الكتاب)

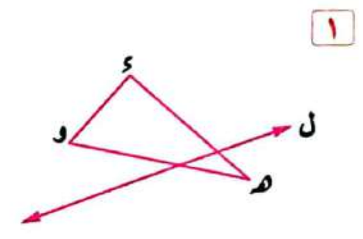




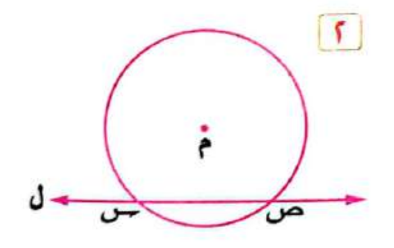
شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

٢ 📖 ارسم صورة كل من المثلث ء هـ و والدائرة التى مركزها م بالانعكاس فى المستقيم ل:

١



٢



٣ ارسم المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٦ سم ، ق(∠ أ) = ٩٠° ، ق(∠ ب) = ٣٠°

ثم ارسم صورته بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{أب}$

٤ 📖 ارسم صورة المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ، أ حـ = ٥ سم

بالانعكاس فى المستقيم الذى يحتوى الضلع الأصغر طولاً.

٥ ارسم صورة المثلث سـ ص ع الذى أطوال أضلاعه سـ ص = ٣ سم ، ص ع = ٥ سم ، ع سـ = ٧ سم بالانعكاس فى المستقيم الذى يحتوى الضلع الأكبر طولاً.

---

٦ ارسم المستطيل أ ب حـ ء الذى فيه : أ ب = ٦ سم ، حـ ب = ٤ سم ثم ارسم صورته بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{أ ء}$ ، اذكر اسم الشكل المكون من المستطيل وصورته ثم أوجد محيطه. «٣٢ سم»

---

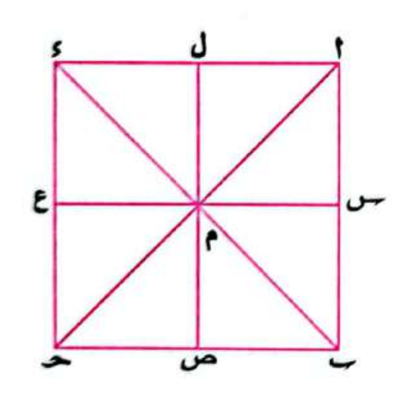
٧ ارسم △ أ ب حـ حيث : ب حـ = ٣ سم ، أ ب = ٤ سم ، أ حـ = ٥ سم

وإذا كانت النقطة ء هى صورة النقطة حـ بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{أ ب}$ فأوجد :

١ محيط △ أ حـ ء ٢ مساحة △ أ حـ ء «١٦ سم ، ١٢ سم^2»

---

٨ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع تقاطع قطراه فى م

، سـ ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاعه

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$ على الترتيب. أكمل ما يأتى :

١ صورة النقطة أ بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{ل ص}$ هى ....

٢ صورة $\overline{أ م}$ بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{سـ م}$ هى ....

٣ صورة △ أ ل م بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{ل ص}$ هى ....

٤ صورة △ أ ل م بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{أ م}$ هى ....

٥ صورة △ أ م ب بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{ل ص}$ هى ....

٦ صورة △ أ م ب بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{سـ ع}$ هى ....

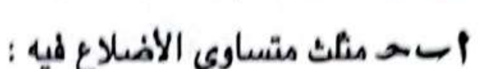
٧ صورة المربع أ سـ م ل بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{ل ص}$ هى .... وبالانعكاس فى $\overleftrightarrow{أ م}$ هى ....

٨ صورة المربع أ ب حـ ء بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{ل ص}$ هى ....

٩ △ م ع ء صورة △ م ع حـ بالانعكاس فى ....

١٠ △ أ سـ م صورة △ حـ ص م بالانعكاس فى ....

٩ في الشكل المقابل :



أ ب ج مثلث متساوى الأضلاع فيه :

ء ، هـ ، و منتصفات أب ، ب ج ، ج أ على الترتيب

، أهـ ∩ ب و ∩ ج ء = {م} أكمل ما يأتى :

١ محاور تماثل المثلث أ ب ج هى ....

٢ أب صورة أج بالانعكاس فى ....

٣ صورة أو بالانعكاس فى ب و هى ....

، وصورة ج و بالانعكاس فى أهـ هى ....

٤ صورة △ أ م ء بالانعكاس في أهـ هى ....

∴ ق (∠ أ م ء) = ق (∠ ....) لأن الانعكاس يحافظ على ....

٥ صورة △ أ م ب بالانعكاس فى أهـ هى ....

٦ △ ب م ج صورة .... بالانعكاس فى ج ء ، صورة .... بالانعكاس فى ب و

∴ ب م = أ م ، ج م = أ م لأن الانعكاس يحافظ على ....

١٠ أكمل ما يأتى :

١ الانعكاس فى المستوى يحافظ على : .... ، .... ، ....

، ....

٢ إذا كان الانعكاس فى مستقيم يحول الشكل إلى نفسه فإن هذا المستقيم يسمى ....

٣ عدد محاور تماثل :

(أ) المثلث المتساوى الأضلاع = ... | (ب) المثلث المتساوى الساقين = ...

(جـ) المثلث المختلف الأضلاع = ... | (د) متوازى الأضلاع = ...

(هـ) المستطيل = ... | (و) المعين = ...

(ز) المربع = ...

(هـ) شبه المنحرف غير المتساوى الساقين = ...

(ط) شبه المنحرف المتساوى الساقين = ...

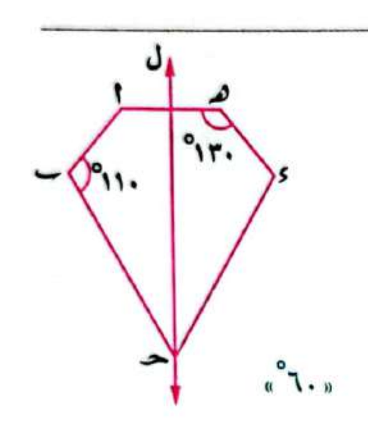
(ى) الدائرة = ...

١١ في الشكل المقابل :

إذا كان المستقيم ل هو محور تماثل

الشكل أ ب حـ ء هـ

فاحسب : ق (∠ ب حـ ء)



١٢ باستخدام الأدوات الهندسية : ارسم المستطيل أ ب حـ ء الذى فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ، عين أَ صورة أ بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ، حـَ صورة حـ بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{أ ب}$

برهن أن : [١] ق (∠ حـَ أ حـ) = ٢ ق (∠ حـ أ ب)   [٢] $\overleftrightarrow{أ حـَ}$ // $\overleftrightarrow{أَ حـ}$

ثانيًا مسائل على الانعكاس فى المستوى الإحداثى

١ في الشكل المقابل :

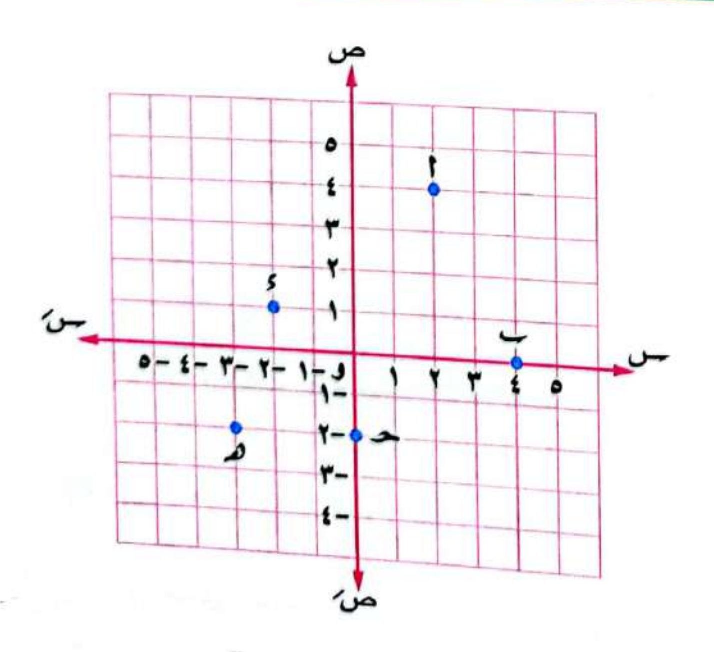
اكتب إحداثيي صورة كل نقطة

من النقط أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ

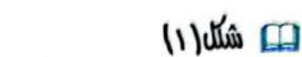
بالانعكاس فى :

[١] محور السينات.

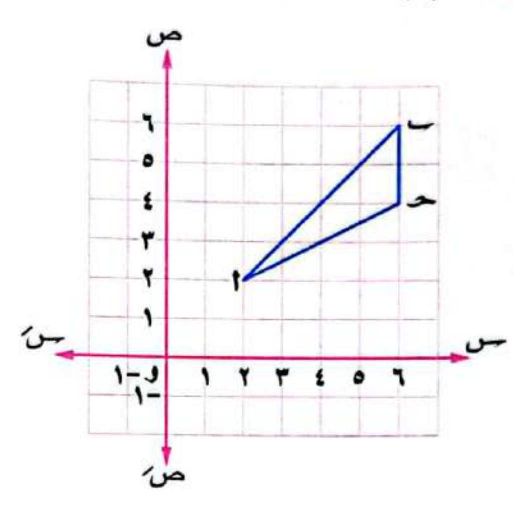
[٢] محور الصادات.



٢ انقل كل شكل مما يأتى على ورق مربعات ، ارسم صور الأشكال بتحويل هندسى كما هو موضح أسفل كل شكل ثم اكتب إحداثيى كل رأس من رءوس الشكل.

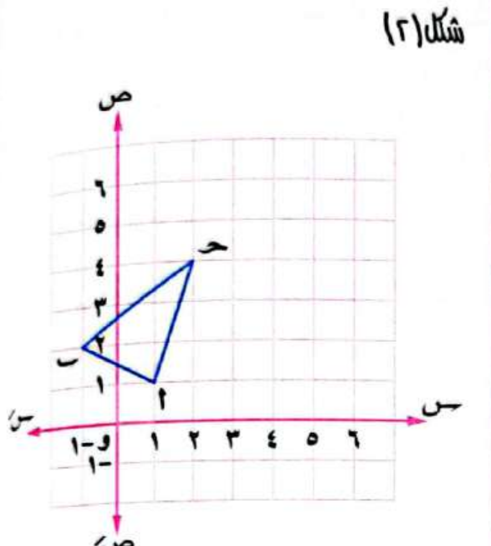


شكل(١)

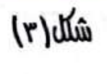


انعكاس فى محور $\overleftrightarrow{\text{س س}'}$

شكل(٢)



انعكاس فى محور $\overleftrightarrow{\text{ص ص}'}$



شكل(٣)



انعكاس فى محور الصادات

شكل(٤)



انعكاس فى $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$



٣ ارسم $\overline{\text{أ ب}}$ حيث : أ (٤ ، ٣) ، ب (١ ، −٢) ثم ارسم صورتها بالانعكاس فى :

١ محور السينات. **٢** محور الصادات.

٤ إذا كانت : أ (٣ ، ١) ، ب (٣ ، −٢) فارسم $\overline{\text{ءحـ}}$ صورة $\overline{\text{أب}}$ بالانعكاس في محور الصادات واذكر اسم الشكل أ ب حـ ء واحسب محيطه.

«١٨ وحدة طول»

٥ باستخدام الشبكة التربيعية المتعامدة ارسم صورة المثلث أ ب حـ حيث :

أ (−٦ ، −١) ، ب (−٢ ، −١) ، حـ (−٥ ، −٦) بالانعكاس في محور $\overleftrightarrow{\text{س س}}$

٦ ارسم صورة Δ و ب حـ حيث : و (٠ ، ٠) ، ب (٣ ، ٠) ، حـ (−١ ، ٢)

بالانعكاس في محور الصادات.

٧ ارسم على شبكة تربيعية Δ أ ب حـ حيث : أ (٢ ، −٢) ، ب (٣ ، ٤) ، حـ (−٣ ، ٢)

ثم ارسم Δ أَ بَ حَ صورة Δ أ ب حـ بالانعكاس في محور الصادات.

ثم ارسم Δ أً بً حً صورة Δ أَ بَ حَ بالانعكاس في محور السينات.

٨ ارسم على شبكة تربيعية المستطيل الذي رءوسه النقط : أ (٣ ، ٢) ، ب (٨ ، ٢) ، حـ (٨ ، ٦) ، ء (٣ ، ٦) ثم ارسم صورته بالانعكاس في محور $\overleftrightarrow{\text{ص ص}}$

٩ ارسم المربع أ ب حـ ء وصورته بالانعكاس في محور $\overleftrightarrow{\text{س س}}$ حيث :

أ (٠ ، ٢) ، ب (−٥ ، ٠) ، حـ (−٣ ، −٥) ، ء (٢ ، −٣)

ثم قارن طول ضلع كل منهما ومساحته.

١٠ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ (١ ، ١) ، ب (١ ، ٣) ، حـ (−٣ ، ٣) عين إحداثيي النقطة ء من الرسم ثم ارسم صورة المستطيل أ ب حـ ء بالانعكاس في محور السينات.

١١ ارسم صورة المربع أ ب حـ ء على الشبكة التربيعية حيث : أ (٢ ، ٣) ، ب (٢ ، −١) بالانعكاس في محور $\overleftrightarrow{\text{ص ص}}$ ، ماذا تلاحظ ؟

١٢ ارسم صورة المستطيل أ ب حـ ء حيث : أ (٢ ، ٢) ، ب (–٣ ، ٢) وعرضه يساوى ٣ وحدات بالانعكاس فى محور $\overleftrightarrow{س س}$ ، كم حالة يمكن رسمها ؟

١٣ أكمل الجدول التالى :

م	النقطة	صورتها بالانعكاس فى محور السينات	صورتها بالانعكاس فى محور الصادات
١	(٣ ، –٢)	....	....
٢	....	(١ ، ٢)	....
٣	....	....	(–٢ ، ٤)
٤	(٠ ، ٥)	....	....
٥	....	(٣ ، ٠)	....
٦	....	....	(٠ ، ٠)

١٤ أكمل ما يأتى :

١ صورة النقطة (١ ، ٣) بالانعكاس فى محور السينات هى ....

٢ صورة النقطة (–٢ ، ٥) بالانعكاس فى محور الصادات هى ....

٣ صورة النقطة (٢ ، –٣) بالانعكاس فى محور .... هى (٢ ، ٣)

٤ صورة النقطة (–١ ، –٤) بالانعكاس فى محور .... هى (١ ، –٤)

٥ صورة النقطة (٠ ، ٣) بالانعكاس فى محور .... هى نفسها.

٦ صورة النقطة (–٥ ، ٠) بالانعكاس فى محور .... هى نفسها.

٧ صورة النقطة (٢ ، ١) بالانعكاس فى محور السينات متبوعًا بالانعكاس فى محور الصادات

هى ....

٨ صورة النقطة (٢ ، −٣) بالانعكاس فى محور الصادات متبوعًا بالانعكاس فى محور السينات هى ....

٩ إذا كانت أَ (−٢ ، ٣) هى صورة النقطة أ (٢ ، ٣) بالانعكاس فى محور الصادات فإن صورة النقطة أَ بالانعكاس فى محور الصادات هى ....

للمتفوقين

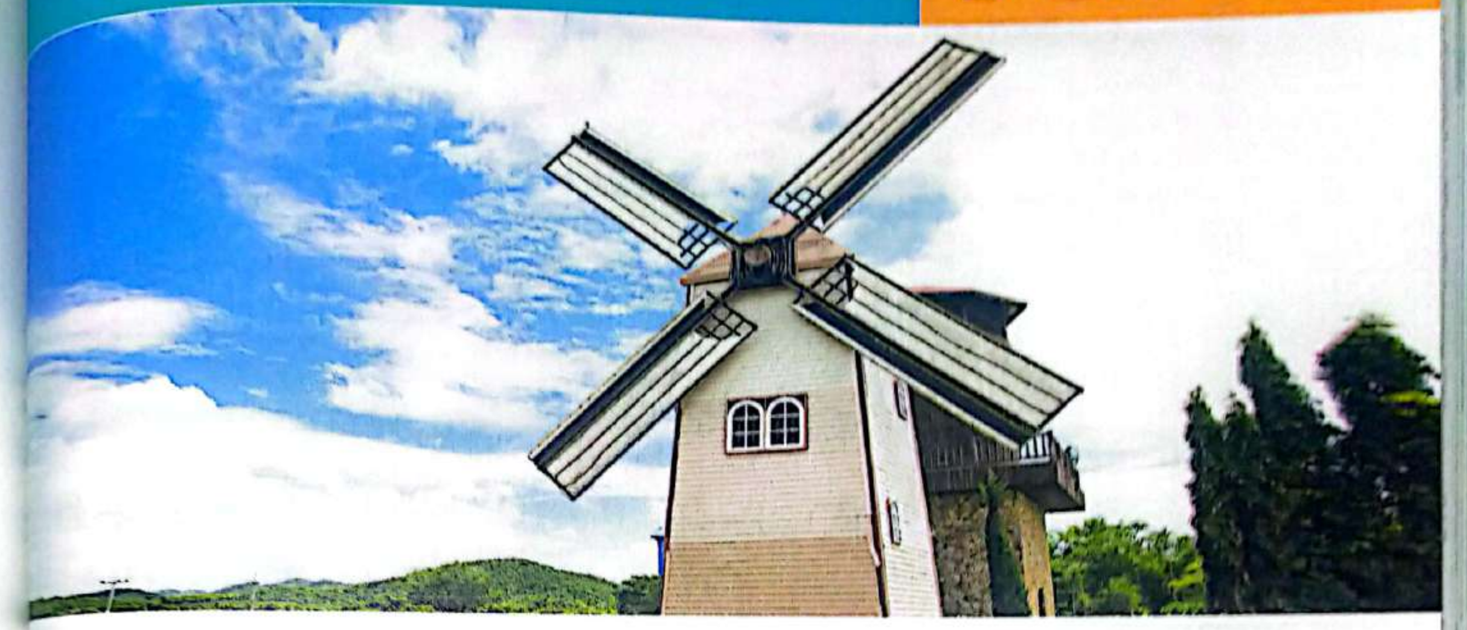
١٠ عين على شبكة تربيعية النقط : أ (٥ ، ٤) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (٢ ، ١) ، أَ (٤ ، ٥) ، بَ (١ ، ٥) ، حـَ (١ ، ٢)

١ إذا كان Δ أَ بَ حـَ صورة Δ أ ب حـ بالانعكاس فى المستقيم ل ارسم هذا المستقيم.

٢ إذا كان الشكل أ ب بَ أَ صورة الشكل حـ ب بَ حـَ بالانعكاس فى المستقيم م ارسم هذا المستقيم.

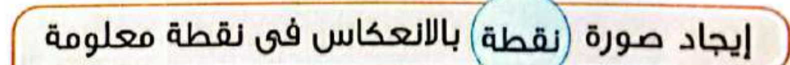


الدرس 10 الانعكاس فى نقطة



تعريف الانعكاس فى نقطة

الانعكاس فى نقطة م يحول كل نقطة أ فى المستوى إلى النقطة أً فى نفس المستوى بحيث تكون م منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أأً}}$ وتسمى النقطة م مركز الانعكاس وتكون صورة م بالانعكاس فى م هى نفسها.



إيجاد صورة (نقطة) بالانعكاس فى نقطة معلومة

* لإيجاد صورة نقطة ولتكن أ بالانعكاس فى نقطة م نتبع ما يلى :

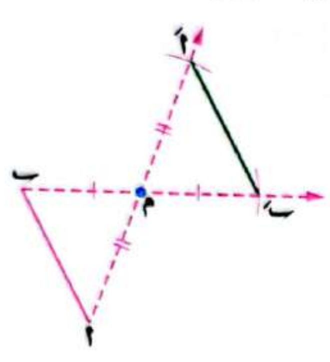
١ نرسم $\overleftarrow{\text{أم}}$

٢ نفتح الفرجار فتحة طولها يساوى م أ ونركز فى نقطة م ونرسم قوسًا يقطع $\overleftarrow{\text{أم}}$ فى نقطة ولتكن أً فتكون أً هى صورة أ بالانعكاس فى نقطة م

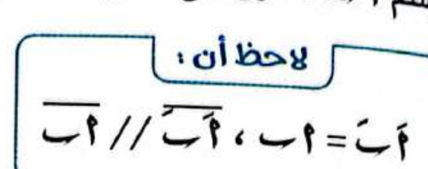
٣ ونجد أن : م أ = م أً

إيجاد صورة قطعة مستقيمة بالانعكاس فى نقطة معلومة

• إيجاد صورة قطعة مستقيمة ولتكن $\overline{أب}$ بالانعكاس فى نقطة م نتبع ما يلى :



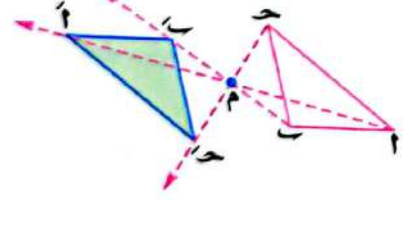
1. نوجد صورة أ بالانعكاس فى م ولتكن أَ كما ذكرنا سابقًا.
2. وبالمثل نوجد صورة ب بالانعكاس فى م ولتكن بَ
3. نرسم $\overline{أَبَ}$ فتكون هى صورة $\overline{أب}$ بالانعكاس فى م


لاحظ أن :
أَبَ = أب ، $\overline{أَبَ}$ // $\overline{أب}$

أى أن :
صورة قطعة مستقيمة بالانعكاس فى نقطة هى قطعة مستقيمة موازية لها ومساوية لها فى الطول.

إيجاد صورة مضلع بالانعكاس فى نقطة معلومة

• إيجاد صورة مضلع وليكن △ أ ب حـ بالانعكاس فى نقطة م نتبع ما يلى :



1. نوجد صورة كل رأس من رءوس △ أ ب حـ بالانعكاس فى نقطة م كما ذكرنا سابقًا.
   ولتكن أَ صورة أ ، بَ صورة ب ، حـَ صورة حـ
2. نرسم $\overline{أَبَ}$ ، $\overline{بَحـَ}$ ، $\overline{حـَأَ}$ فيكون △ أَبَحـَ هو صورة △ أ ب حـ بالانعكاس فى م

لاحظ أن :
△ أ ب حـ ≡ △ أَبَحـَ لذلك فإن الانعكاس فى نقطة هو تساوى قياسى.

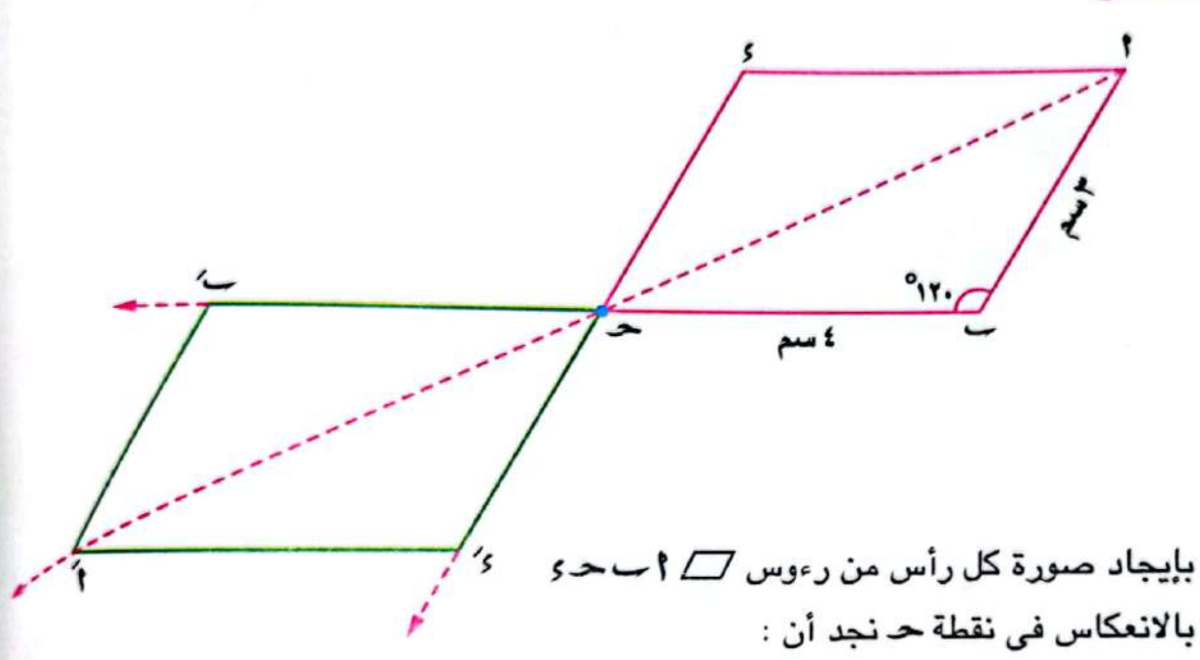
مما سبق نستنتج أن :
الانعكاس فى نقطة هو تحويل هندسى يحول الشكل الهندسى إلى شكل هندسى آخر يتطابق معه ويتفق معه فى الاتجاه الدورانى لترتيب رءوسه.

خواص الانعكاس فى نقطة

مثال توضيحى

ارسم متوازى الأضلاع أ ب حـ ء الذى فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠° ثم ارسم صورته بالانعكاس فى نقطة حـ واذكر ماذا تلاحظ.

الحـــل



بإيجاد صورة كل رأس من رءوس ▱ أ ب حـ ء بالانعكاس فى نقطة حـ نجد أن :

▱ أَ بَ حـ ءَ صورة ▱ أ ب حـ ء بالانعكاس فى النقطة حـ

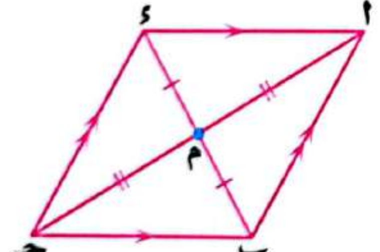
لاحظ أن :

١ أَ بَ = أ ب ، بَ حـ = ب حـ ، حـ ءَ = حـ ء ، ءَ أَ = ء أ	أى أن الانعكاس فى نقطة يحافظ على أطوال القطع المستقيمة.
٢ ق (∠ أَ) = ق (∠ أ) ، ق (∠ بَ) = ق (∠ ب) ، ق (∠ بَ حـ ءَ) = ق (∠ ب حـ ء) ، ق (∠ ءَ) = ق (∠ ء)	أى أن الانعكاس فى نقطة يحافظ على قياسات الزوايا.

٣ من متوازى الأضلاع أ ب حـ ء : $\overline{أ ب}$ // $\overline{ء حـ}$ ، من متوازى الأضلاع أَ بَ حـَ ءَ : $\overline{أَ بَ}$ // $\overline{ءَ حـَ}$ ∴ صورتا قطعتين مستقيمتين متوازيتين هما قطعتان مستقيمتان متوازيتان أيضًا. (أى أن)	الانعكاس فى نقطة يحافظ على التوازى.
٤ قراءة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء تسير فى اتجاه دوران عقارب الساعة وأيضًا قراءة متوازى الأضلاع أَ بَ حـَ ءَ فى اتجاه دوران عقارب الساعة. (أى أن)	الانعكاس فى نقطة يحافظ على الاتجاه الدورانى لترتيب رؤوس الشكل.
٥ إذا أخذت نقطة تقع على $\overline{أ ب}$ ووجدت صورتها بالانعكاس فى حـ ستجد أن صورتها تقع على $\overline{أَ بَ}$ (أى أن)	الانعكاس فى نقطة يحافظ على البينية.

استخدام الانعكاس فى نقطة لإثبات أن شكلاً رباعيًا متوازى أضلاع

* سبق أن ذكرنا أن صورة قطعة مستقيمة بالانعكاس فى نقطة هى قطعة مستقيمة موازية لها ومساوية لها فى الطول.



فإذا كانت : $\overline{حـ ء}$ صورة $\overline{أ ب}$ بالانعكاس فى نقطة م

فإن : $\overline{أ ب}$ // $\overline{ء حـ}$ ، أ ب = ء حـ

ويمكن إثبات أن الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع بعدة طرق منها :

١ ∵ أ ب = ء حـ ، $\overline{أ ب}$ // $\overline{ء حـ}$

∴ الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

تذكر أن

الشكل الرباعى الذى فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان فى الطول يكون متوازى أضلاع.

٢ ∵ $\overline{حـ ء}$ صورة $\overline{أ ب}$ بالانعكاس فى م

∴ م أ = م حـ ، م ب = م ء

∴ الشكل أ ب حـ ء **متوازى أضلاع.**

تذكر أن

الشكل الرباعى الذى قطراه ينصف كل منهما الآخر يكون متوازى أضلاع.

٣ ∵ م أ = م حـ ، م ب = م ء

∴ $\overline{أ ء}$ صورة $\overline{حـ ب}$ بالانعكاس فى م

، ∵ $\overline{حـ ء}$ صورة $\overline{أ ب}$ بالانعكاس فى م

∴ $\overline{أ ب}$ // $\overline{ء حـ}$ ، $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$

∴ الشكل أ ب حـ ء **متوازى أضلاع.**

تذكر أن

الشكل الرباعى الذى فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان يكون متوازى أضلاع.

٤ ∵ $\overline{أ ء}$ صورة $\overline{حـ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ صورة $\overline{أ ب}$

بالانعكاس فى م

∴ أ ء = حـ ب ، حـ ء = أ ب

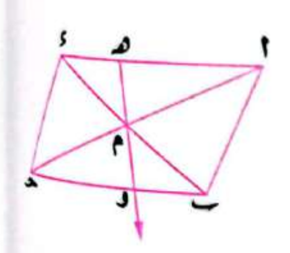
∴ الشكل أ ب حـ ء **متوازى أضلاع.**

تذكر أن

الشكل الرباعى الذى فيه كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول يكون متوازى أضلاع.

مثال ١

فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، م نقطة تقاطع قطريه

، هـ ∈ $\overline{أ ء}$ ، $\overrightarrow{هـ م} \cap \overline{ب حـ} = \{و\}$

برهن أن : ١ و صورة هـ بالانعكاس فى م

٢ الشكل أ و حـ هـ متوازى أضلاع.

الحـل

∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع ∴ $\overline{أء} // \overline{ب حـ}$

∴ ΔΔ أ م هـ ، حـ م و فيهما :

ق (∠ء أ حـ) = ق (∠ب حـ أ) (بالتبادل)

ق (∠أ م هـ) = ق (∠حـ م و) (بالتقابل بالرأس)

أ م = حـ م (من خواص متوازى الأضلاع)

∴ Δ أ م هـ ≡ Δ حـ م و وينتج أن : هـ م = و م

، ∵ و ∈ $\overleftrightarrow{هـ م}$ ∴ و صورة هـ بالانعكاس فى م (المطلوب أولاً)

∵ أ م = حـ م ، أ ∈ $\overleftrightarrow{حـ م}$ ∴ أ صورة حـ بالانعكاس فى م

∴ $\overline{أو}$ صورة $\overline{حـ هـ}$ بالانعكاس فى م ∴ أ و = حـ هـ ، $\overline{أو} // \overline{حـ هـ}$

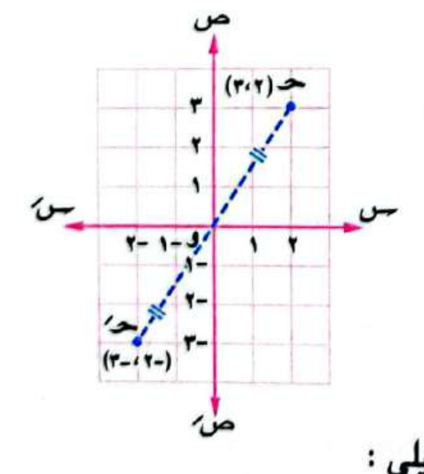
∴ الشكل أ و حـ هـ متوازى أضلاع. (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك 1

ارسم أى مثلث أ ب حـ ثم أرسم صورته أَ بَ حـ بالانعكاس فى نقطة حـ

ثم أثبت أن : الشكل أ ب أَ بَ متوازى أضلاع.

الانعكاس فى نقطة الأصل



* إذا كانت حـ نقطة فى مستوى الإحداثيات حيث حـ (٢ ، ٣)
* فعند إيجاد صورة حـ بالانعكاس فى نقطة الأصل (و) بالطريقة التى درسناها سابقًا نجد أنها حـَ (-٢ ، -٣)
* ونلاحظ أن : إشارة كل من المسقطين الأول والثانى تغيرت

وعلى هذا فإنه يمكن تعريف الانعكاس فى نقطة الأصل كما يلى :

تعريف

إذا كانت أ (س ، ص) نقطة فى مستوى الإحداثيات فإن صورة النقطة أ بالانعكاس فى نقطة الأصل هى أَ (– س ، – ص)

أى أن : **الانعكاس فى نقطة الأصل يعكس إشارة كل من الإحداثيين السينى والصادى.**

∴ صورة النقطة (س ، ص) ←بالانعكاس فى نقطة الأصل← (– س ، – ص)

فمثلًا :
- صورة النقطة (٢ ، ٣) ←بالانعكاس فى نقطة الأصل← (–٢ ، –٣)
- صورة النقطة (–٤ ، ١) ←بالانعكاس فى نقطة الأصل← (٤ ، –١)
- صورة النقطة (٥ ، –٢) ←بالانعكاس فى نقطة الأصل← (–٥ ، ٢)
- صورة النقطة (–٣ ، –٦) ←بالانعكاس فى نقطة الأصل← (٣ ، ٦)

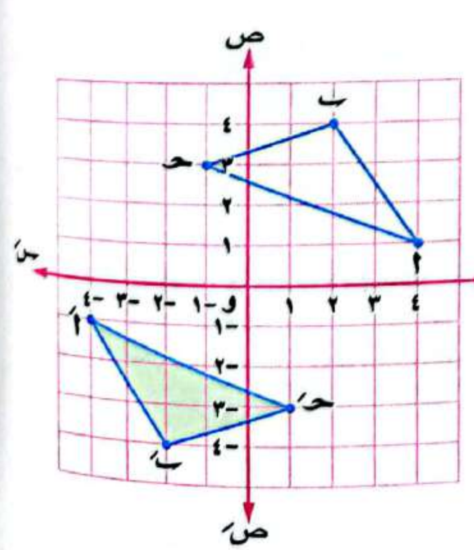
ملاحظة

صورة النقطة (٠ ، ٠) بالانعكاس فى نقطة الأصل هى نفسها .

مثال ٢

ارسم Δ أ ب حـ حيث : أ (٤ ، ١) ، ب (٢ ، ٤) ، حـ (–١ ، ٣)

ثم ارسم صورته بالانعكاس فى نقطة الأصل.



الحل

∵ (س ، ص) ←بالانعكاس فى نقطة الأصل← (– س ، – ص)

∴ أ (٤ ، ١) ←بالانعكاس فى نقطة الأصل← أَ (–٤ ، –١)

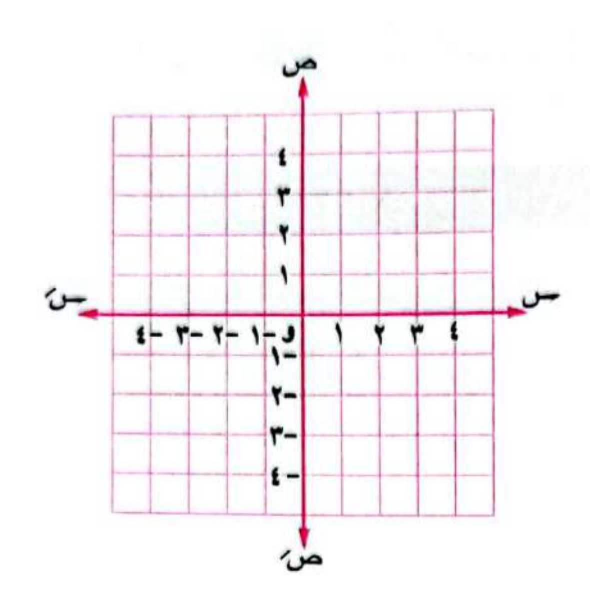
، ب (٢ ، ٤) ←بالانعكاس فى نقطة الأصل← بَ (–٢ ، –٤)

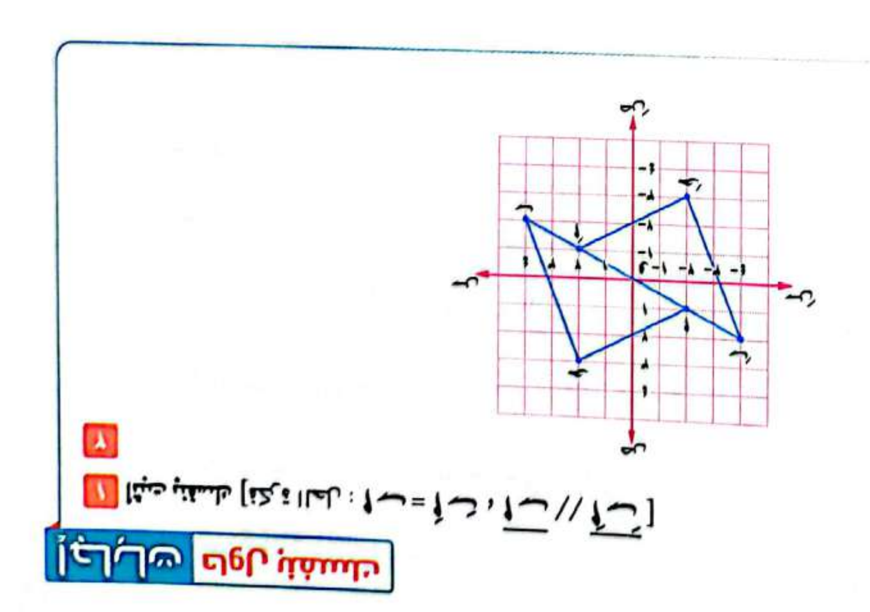
، حـ (–١ ، ٣) ←بالانعكاس فى نقطة الأصل← حـَ (١ ، –٣)

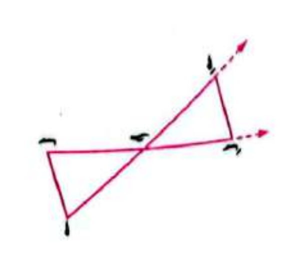
حاول بنفسك ٢

ارسم على الشبكة البيانية المتعامدة
Δ أ ب حـ حيث : أ (−٢ ، ١)
، ب (٤ ، −٢) ، حـ (٢ ، ٣)
ثم ارسم صورته بالانعكاس
في نقطة الأصل.

أَ (....... ، ....)
بَ (....... ، ....)
حَ (....... ، ....)











تمارين 10
على الانعكاس فى نقطة

• تذكر • فهم • تطبيق • حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

اختبار تفاعلى

أولاً مسائل على الانعكاس فى المستوى

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كانت : $\overline{أَ بَ}$ هى صورة $\overline{أ ب}$ بالانعكاس فى نقطة م فإن : أَ بَ .... أ ب

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ≠

(2) فى الشكل المقابل :

صورة $\overline{أ ب}$ بالانعكاس فى النقطة م هى ....

(أ) $\overline{أ م}$ (ب) $\overline{ب أ}$ (جـ) $\overline{ب م}$



(3) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مربع تقاطع قطراه فى م

صورة △ أ ب م بالانعكاس فى م هو △ ....

(أ) أ ء م (ب) ب حـ م (جـ) ء حـ م (د) حـ ء م

(4) إذا كانت أَ هى صورة أ بالانعكاس فى م وكان م أ = ٥ سم فإن : أ أَ = ...

(أ) ٥ سم (ب) ٧ سم (جـ) ١٠ سم (د) ١٥ سم

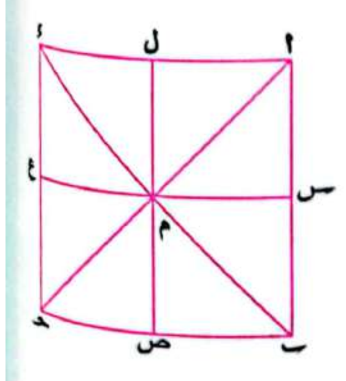


2 فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مربع تقاطع قطراه فى م

، س ، ص ، ع ، ل منتصفات $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$

على الترتيب أكمل ما يأتى :



(1) صورة النقطة أ بالانعكاس فى م هى ....

(2) صورة النقطة س بالانعكاس فى م هى ....

٣ صورة $\overline{أل}$ بالانعكاس فى م هى ....

٤ صورة $\overline{مع}$ بالانعكاس فى م هى ....

٥ صورة $\overline{بم}$ بالانعكاس فى م هى ....

٦ صورة $\overline{أس}$ بالانعكاس فى س هى ....

٧ صورة Δ أ ل م بالانعكاس فى م هى ....

٨ صورة Δ ب س م بالانعكاس فى م هى ....

٩ صورة Δ أ م ب بالانعكاس فى م هى ....

١٠ صورة المربع أ س م ل بالانعكاس فى م هى ....

---

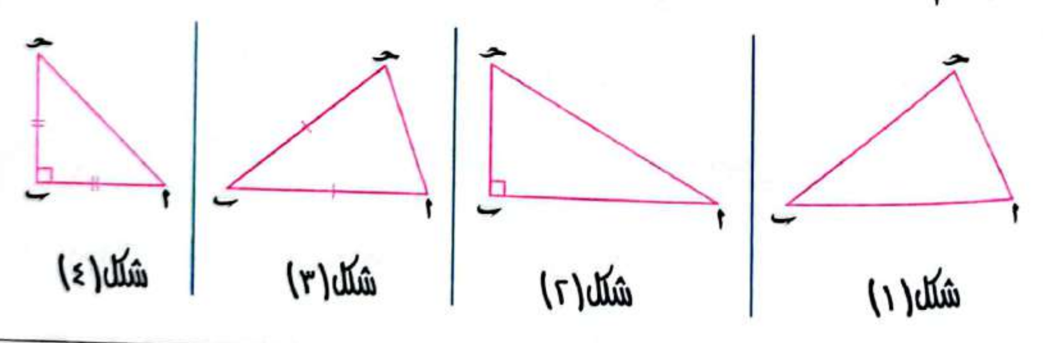
٣ ارسم Δ أ ب ح الذى فيه : أ ب = ب ح = ٤ سم ، أ ح = ٥ سم

ثم ارسم صورته بالانعكاس فى النقطة ب

---

٤ فى كل من الأشكال الآتية ارسم Δ أَ بَ حَ صورة Δ أ ب ح بالانعكاس فى النقطة ب

واذكر اسم الشكل أ حَ أَ ح موضحًا السبب :



---

٥ ارسم المثلث أ ب ح الذى فيه : ب ح = ٣ سم ، أ ب = ٤ سم ، ق(∠ب) = ٩٠°

ثم ارسم المثلث أَ بَ ح صورة المثلث أ ب ح بالانعكاس فى النقطة ح

وأثبت أن : الشكل أ ب أَ بَ متوازى أضلاع.

٦ ارسم المربع أ ب حـ ء الذى طول ضلعه ٥ سم ثم ارسم صورته بالانعكاس فى نقطة م حيث م نقطة تقاطع القطرين. ماذا تلاحظ ؟

---

٧ أ ب حـ مثلث ، النقطة و منتصف $\overline{أحـ}$ ، ارسم ء صورة ب بالانعكاس فى و ، ما نوع الشكل أ ب حـ ء ؟ وما نوع المثلث أ ب حـ الذى يجعل الشكل أ ب حـ ء :

١ مستطيلاً.   ٢ معيناً.

---

٨ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل ، م نقطة تقاطع قطريه

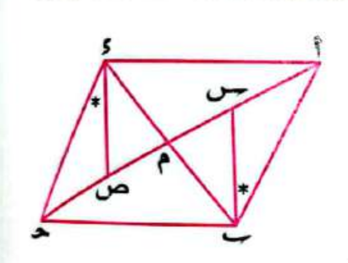
، س ∈ $\overline{أء}$ ، $\overleftarrow{سم}$ ∩ $\overline{بحـ}$ = {ص}

برهن أن : ١ ص صورة س بالانعكاس فى م

٢ الشكل أ س حـ ص متوازى أضلاع.

---

٩ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، س ∈ $\overline{أحـ}$

، ص ∈ $\overline{أحـ}$ بحيث ق (∠ أ ب س) = ق (∠ حـ ء ص)

برهن أن : ١ Δ أ ب س صورة Δ حـ ء ص بالانعكاس فى م

٢ الشكل س ب ص ء متوازى أضلاع.

ثانيًا مسائل على الانعكاس فى المستوى الإحداثى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ صورة النقطة (-٣ ، ٢) بالانعكاس فى نقطة الأصل ....

(أ) (٣ ، ٢)   (ب) (-٣ ، -٢)   (جـ) (٣ ، -٢)   (د) (-٣ ، ٢)

٢ النقطة (٥ ، -٢) صورة النقطة .... بالانعكاس فى نقطة الأصل.

(أ) (٥ ، -٢)   (ب) (-٥ ، -٢)   (جـ) (-٥ ، ٢)   (د) (٥ ، ٢)

٣ النقطة التى صورتها هى نفسها بالانعكاس فى نقطة الأصل هى ....

(أ) (٠ ، ١)　　(ب) (١ ، ٠)　　(جـ) (٠ ، ٠)　　(د) (-١ ، ٠)

٤ صورة النقطة (٣ ، -٢) بالانعكاس فى نقطة الأصل متبوعًا بالانعكاس فى محور السينات هى ....

(أ) (٣ ، -٢)　　(ب) (-٣ ، -٢)　　(جـ) (-٣ ، ٢)　　(د) (٣ ، ٢)

---

٢ ارسم على شبكة تربيعية ∆ أ ب حـ الذى فيه : أ (٣ ، ١) ، ب (١ ، ٤) ، حـ (٠ ، ٠)
ثم ارسم صورته بالانعكاس فى نقطة حـ

---

٣ فى نظام إحداثى متعامد ذى البعدين ، ارسم المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ (-٢ ، ٤) ، ب (٥ ، ٠) ، حـ (٣ ، -٣) ثم ارسم صورة ∆ أ ب حـ بالانعكاس فى نقطة الأصل.

---

٤ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ (٢ ، ٥) ، ب (٦ ، ٥) ، حـ (٦ ، ٨) ، ء (٢ ، ٨)
ارسم صورة المستطيل أ ب حـ ء بالانعكاس فى نقطة الأصل.

للمتفوقين

٥ فى الشكل المقابل :

إذا كانت $\overline{\text{حـ ء}}$ صورة $\overline{\text{ب أ}}$ بالانعكاس فى م

وكان : ب أ = (٢ س + ٥) سم ، حـ ء = (س + ٩) سم

، ق (∠ أ) = ٢ ص ، ق (∠ ء) = ٦٠°

أوجد :

١ طول $\overline{\text{حـ ء}}$　　　٢ قيمة ص

«١٣ سم ، ٣٠°»

الدرس 11

الانتقـــــال



تمهيد





إذا تحركت سيارة للأمام فى خط مستقيم مسافة ٢٥ مترًا فإننا نقول إن :
السيارة انتقلت مسافة ٢٥ مترًا للأمام

أى أنه : لكى نعرف الموضع الجديد للسيارة بعد تحركها يلزم معرفة عنصرين هامين هما :

١ **مقدار الانتقال** (٢٥ مترًا) ٢ **اتجاه الانتقال** (للأمام فى خط مستقيم)

وعلى هذا فإن :

الانتقال هو «تحويلة هندسية» تحول كل نقطة أ فى المستوى إلى نقطة أَ فى نفس المستوى مسافة ثابتة فى اتجاه معين.

الانتقال فى المستوى

إيجاد صورة نقطة بانتقال معلوم

* **لإيجاد أَ صورة أ بانتقال م ن فى اتجاه $\overrightarrow{من}$ نتبع ما يلى :**

١ نرسم من أ شعاعًا يوازى $\overrightarrow{من}$ وفى نفس اتجاهه.

أ

م

ن

٢ نركز بسن الفرجار فى أ وبفتحة طولها م ن

نرسم قوسًا يقطع الشعاع المرسوم من أ

فى نقطة أَ (أأَ = م ن ، أأَ // م ن)

فتكون أَ صورة أ بانتقال م ن فى اتجاه م ن



إيجاد صورة قطعة مستقيمة بانتقال معلوم

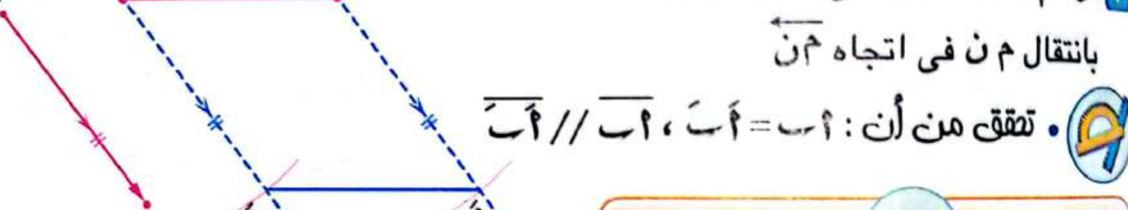
* لإيجاد صورة أ ب بانتقال م ن فى اتجاه م ن نتبع ما يلى :

١ نوجد صورة أ بانتقال م ن فى اتجاه م ن كما ذكرنا سابقًا ولتكن أَ

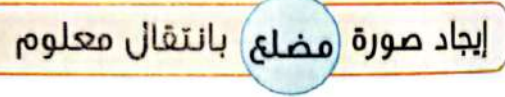
٢ بالمثل نوجد صورة ب بانتقال م ن فى اتجاه م ن كما ذكرنا سابقًا ولتكن بَ

٣ نرسم أَ بَ فتكون هى صورة أ ب

بانتقال م ن فى اتجاه م ن



• تحقق من أن : أ ب = أَ بَ ، أ ب // أَ بَ



إيجاد صورة مضلع بانتقال معلوم

* لإيجاد صورة مضلع وليكن Δ أ ب ح بانتقال م ن فى اتجاه م ن نتبع ما يلى :

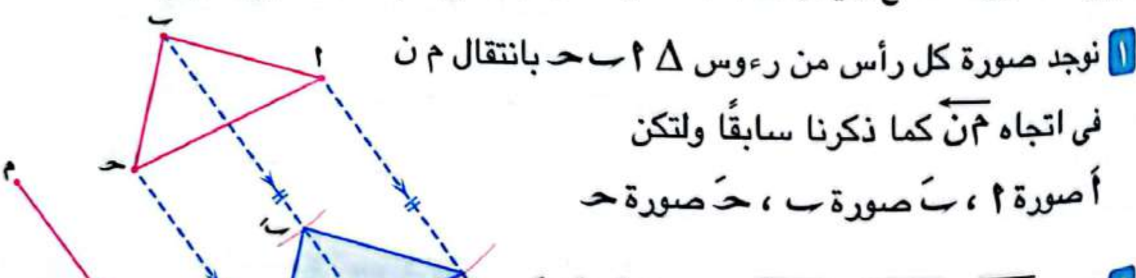
١ نوجد صورة كل رأس من رءوس Δ أ ب ح بانتقال م ن

فى اتجاه م ن كما ذكرنا سابقًا ولتكن

أَ صورة أ ، بَ صورة ب ، حَ صورة ح

٢ نرسم أَ بَ ، بَ حَ ، حَ أَ فيكون Δ أَ بَ حَ

هو صورة Δ أ ب ح بانتقال م ن فى اتجاه م ن



• تحقق من أن : * أ ب = أَ بَ ، ب ح = بَ حَ ، ح أ = حَ أَ

* ق (∠ أ) = ق (∠ أَ) ، ق (∠ ب) = ق (∠ بَ) ، ق (∠ ح) = ق (∠ حَ)

مما سبق نستنتج أن :

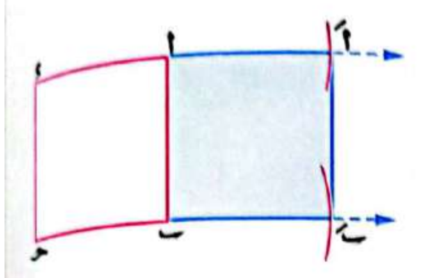
الانتقال هو «تحويلة هندسية» تحول الشكل الهندسى إلى شكل هندسى آخر مطابق له.

خواص الانتقال

مثال توضيحى

ارسم المربع أ ب حـ ء الذى طول ضلعه ٤ سم
ثم ارسم صورته بالانتقال مسافة أ ب فى اتجاه $\overrightarrow{ءأ}$

الحـــل



المربع أَ بَ ب أ صورة المربع أ ب حـ ء
بانتقال مسافة أ ب فى اتجاه $\overrightarrow{ءأ}$

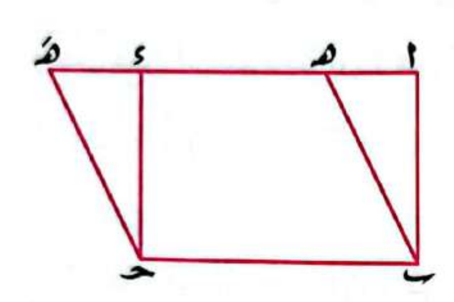
لاحظ أن :

١ أأَ = أ ب ، أ ب = ء حـ	أى أن الانتقال يحافظ على أطوال القطع المستقيمة.
٢ ق (∠ أَ) = ق (∠ ب أ ء) ، ق (∠ بَ) = ق (∠ حـ ب أ)	أى أن الانتقال يحافظ على قياسات الزوايا.
٣ من المربع أ ب حـ ء : $\overline{أب}$ // $\overline{ءحـ}$ ، من المربع أَ بَ ب أ : $\overline{أَبَ}$ // $\overline{أب}$ ∴ صورتا قطعتين مستقيمتين متوازيتين هما قطعتان مستقيمتان متوازيتان أيضًا.	أى أن الانتقال يحافظ على التوازى.
٤ قراءة المربع أ ب حـ ء تسير فى اتجاه دوران عقارب الساعة وأيضًا قراءة المربع أَ بَ ب أ فى اتجاه دوران عقارب الساعة.	أى أن الانتقال يحافظ على الاتجاه الدورانى لترتيب رؤوس الشكل.
٥ إذا أخذت نقطة تقع على $\overline{أب}$ ووجدت صورتها بالانتقال السابق ستجد أن صورتها تقع على $\overline{أَبَ}$	أى أن الانتقال يحافظ على البينية.

مثال ١

ارسم المستطيل أ ب حـ ء ، وخذ هـ ∈ $\overline{أء}$ ثم أوجد صورة النقطة هـ بانتقال ء أ فى اتجاه $\overleftarrow{أء}$ ثم برهن أن : الشكل هـ ب حـ هـَ متوازى أضلاع.

الحل



* نأخذ هـَ ∈ $\overleftarrow{أء}$ بحيث هـَ هـ = أء

فتكون هـَ صورة هـ بانتقال ء أ فى اتجاه $\overleftarrow{أء}$

* ∵ أ ب حـ ء مستطيل.

∴ $\overline{أء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، أء = ب حـ

∴ حـ صورة ب بانتقال أء فى اتجاه $\overleftarrow{أء}$

، ∵ هـَ صورة هـ بنفس الانتقال.

∴ $\overline{هـَ حـ}$ صورة $\overline{هـ ب}$ بانتقال أء فى اتجاه $\overleftarrow{أء}$

∴ هـ ب = هـَ حـ ، $\overline{هـ ب}$ // $\overline{هـَ حـ}$

∴ الشكل هـ ب حـ هـَ متوازى أضلاع. (وهو المطلوب)

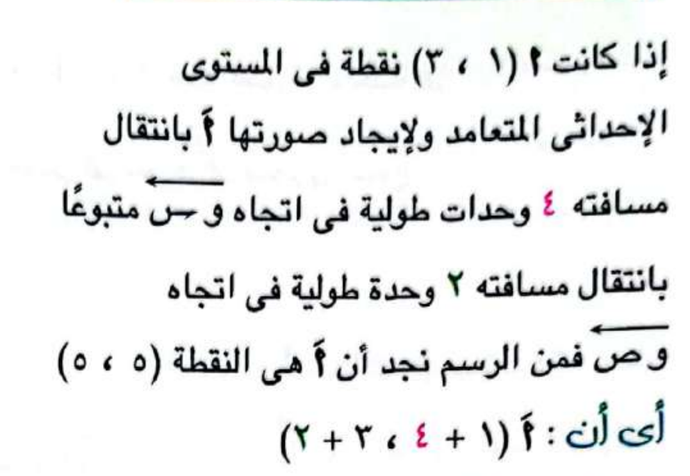
حاول بنفسك ١

ارسم أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، خُذ هـ ∈ $\overline{أء}$ بحيث $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أء}$ ثم ارسم صورة △ أ ب هـ بانتقال مقداره أء فى اتجاه $\overleftarrow{أء}$

١ أثبت أن : الشكل هـ ب حـ هـَ مستطيل (حيث هـَ صورة هـ بالانتقال السابق).

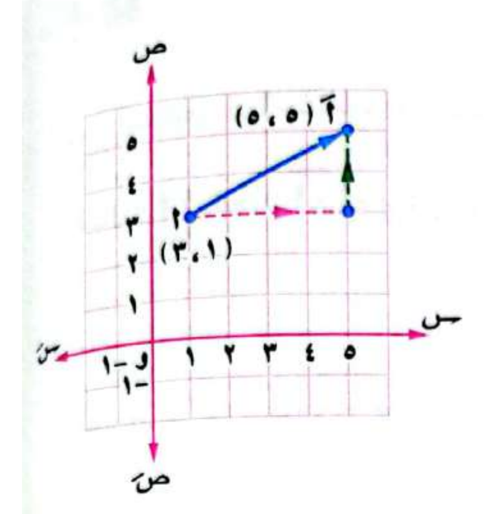
٢ عيِّن : مقدار واتجاه الانتقال الذى يحول $\overline{ب حـ}$ إلى $\overline{هـ هـَ}$

الانتقال فى المستوى الإحداثى



إذا كانت أ (١ ، ٣) نقطة فى المستوى الإحداثى المتعامد ولإيجاد صورتها أَ بانتقال مسافته ٤ وحدات طولية فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وس}}$ متبوعًا بانتقال مسافته ٢ وحدة طولية فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وص}}$ فمن الرسم نجد أن أَ هى النقطة (٥ ، ٥)

أى أن : أَ (١ + ٤ ، ٣ + ٢)



وعلى هذا فإن :

الانتقال فى المستوى الإحداثى يحول كل نقطة إزاحة سينية هـ يتبعها إزاحة صادية ء

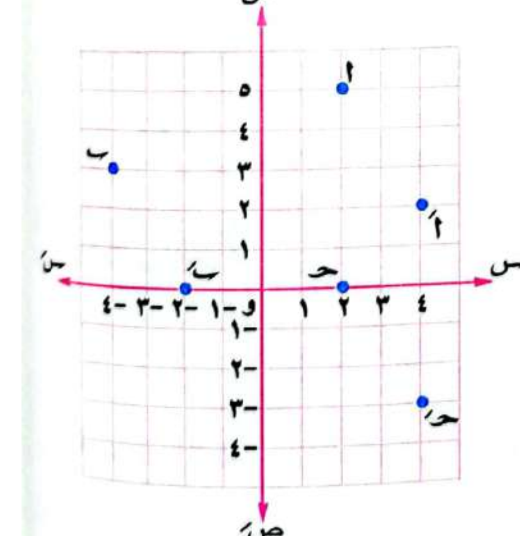
أى أن : صورة النقطة أ (س ، ص) ⟵ النقطة أَ (س + هـ ، ص + ء)

مثال ٢

أوجد صور النقط : أ (٢ ، ٥) ، ب (-٤ ، ٣) ، حـ (٢ ، ٠)

بانتقال : (س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص - ٣)

الحل



∵ (س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص - ٣)

- صورة أ (٢ ، ٥) هى أَ (٢ + ٢ ، ٥ - ٣)

  أى أن : أَ (٤ ، ٢)

- صورة ب (-٤ ، ٣) هى بَ (-٤ + ٢ ، ٣ - ٣)

  أى أن : بَ (-٢ ، ٠)

- صورة حـ (٢ ، ٠) هى حَ (٢ + ٢ ، ٠ - ٣)

  أى أن : حَ (٤ ، -٣)

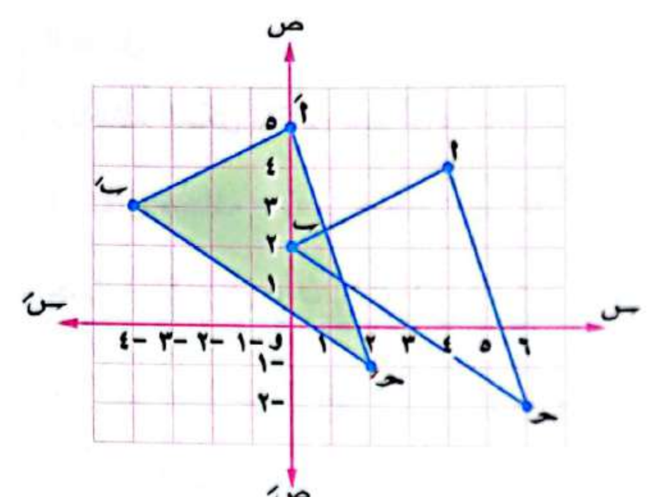
نلاحظ أن : الانتقال : (س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص - ٣)

يحول كل نقطة إزاحة أفقية لليمين مقدارها وحدتان وإزاحة رأسية لأسفل مقدارها ٣ وحدات

مثال ٣

ارسم على شبكة تربيعية Δ أ ب حـ حيث : أ (٤ ، ٤) ، ب (٠ ، ٢) ، حـ (٦ ، −٢)

ثم ارسم صورته بالانتقال : (س ، ص) ⟵ (س − ٤ ، ص + ١)



الحل

(س ، ص) ⟵ (س − ٤ ، ص + ١)

النقطة	صورتها بالانتقال
أ (٤ ، ٤)	أ َ (٠ ، ٥)
ب (٠ ، ٢)	ب َ (−٤ ، ٣)
حـ (٦ ، −٢)	حـ َ (٢ ، −١)

∴ Δ أ َ ب َ حـ َ هو صورة Δ أ ب حـ

بالانتقال (س ، ص) ⟵ (س − ٤ ، ص + ١)

! ملاحظة

الانتقال : (س ، ص) ⟵ (س + أ ، ص + ب) يمكن أن يكتب على الصورة : الانتقال (أ ، ب)

فمثلًا : الانتقال : (س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص − ١)

يمكن أن يكتب على الصورة : الانتقال (٢ ، −١)

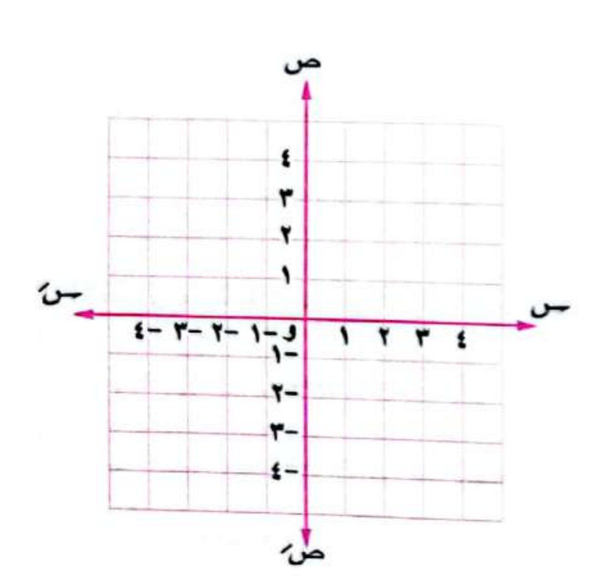
حاول بنفسك ٢

ارسم على شبكة تربيعية Δ أ ب حـ حيث

أ (−٣ ، ٢) ، ب (−١ ، ١) ، حـ (−٢ ، ٠)

ثم ارسم صورته بالانتقال

(س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص + ١)

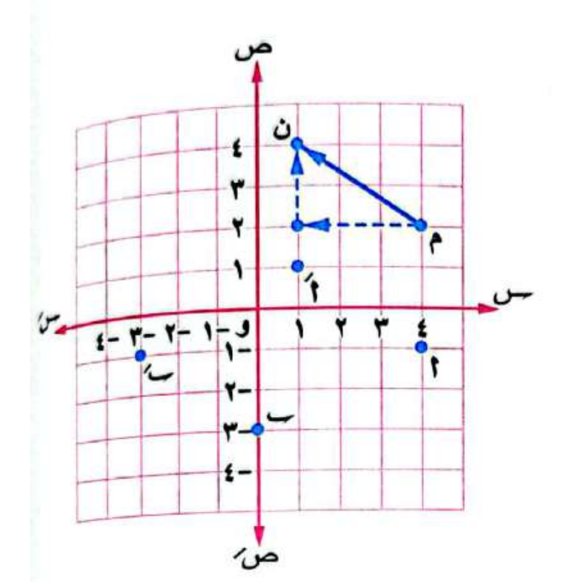


مثال ٤

أوجد صورة كل من النقطتين : أ (٤ ، −١) ، ب (٠ ، −٣) بانتقال مسافة م ن فى اتجاه م ن

حيث : م (٤ ، ٢) ، ن (١ ، ٤)

الحل



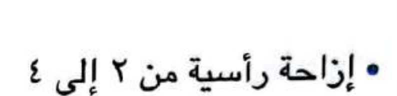
بملاحظة الشكل المقابل نجد أن :

الانتقال مسافة م ن فى اتجاه م ن

حيث م (٤ ، ٢) ، ن (١ ، ٤) يكافئ :

- **إزاحة أفقية من ٤ إلى ١**

أى : إزاحة ٣ وحدات لليسار (−٣)



- **إزاحة رأسية من ٢ إلى ٤**

أى : إزاحة وحدتين لأعلى (٢)

أى أن : (س ، ص) ⟵ (س − ٣ ، ص + ٢)

وعلى هذا فإن :

- **أ (٤ ، −١) ⟵ أ َ (٤ − ٣ ، −١ + ٢)** أى أن : أ َ (١ ، ١)
- **ب (٠ ، −٣) ⟵ ب َ (٠ − ٣ ، −٣ + ٢)** أى أن : ب َ (−٣ ، −١)

لاحظ أن :

الانتقال مسافة م ن فى اتجاه م ن حيث : م (٤ ، ٢) ، ن (١ ، ٤) يكافئ :

- **إزاحة أفقية (سينية) من ٤ إلى ١ وتساوى ١ − ٤ = −٣**
- **إزاحة رأسية (صادية) من ٢ إلى ٤ وتساوى ٤ − ٢ = ٢**

أى أن : قاعدة الانتقال هى : (س ، ص) ⟵ (س − ٣ ، ص + ٢)

مثال ٥

ارسم صورة Δ أ ب حـ حيث : أ (٥ ، ٢) ، ب (٤ ، ٥) ، حـ (٢ ، ٢)

بانتقال ب حـ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ واكتب قاعدة الانتقال.

الحـــل

∵ ب (٤ ، ٥) ، حـ (٢ ، ٢)

∴ الانتقال مسافة ب حـ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ يكافئ :

• إزاحة أفقية وتساوى ٢ − ٤ = −٢ • إزاحة رأسية وتساوى ٢ − ٥ = −٣

أى أن : قاعدة الانتقال هى : (س ، ص) ⟵ (س − ٢ ، ص − ٣)

وعلى هذا فإن :

• أ (٥ ، ٢) ⟵ أَ (٥ − ٢ ، ٢ − ٣)

أى أن : أَ (٣ ، −١)

• ب (٤ ، ٥) ⟵ بَ (٤ − ٢ ، ٥ − ٣)

أى أن : بَ (٢ ، ٢) (بَ تنطبق على نقطة حـ)

• حـ (٢ ، ٢) ⟵ حـَ (٢ − ٢ ، ٢ − ٣)

أى أن : حـَ (٠ ، −١)

أى أن : Δ أَ حـ حـَ هو صورة Δ أ ب حـ بانتقال ب حـ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$

حاول بنفسك ٣

ارسم المربع أ ب حـ ء حيث : أ (٤ ، −٢) ، ب (٤ ، −٥) ، حـ (١ ، −٥) ، ء (١ ، −٢)

وارسم صورته بانتقال حـ أ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$

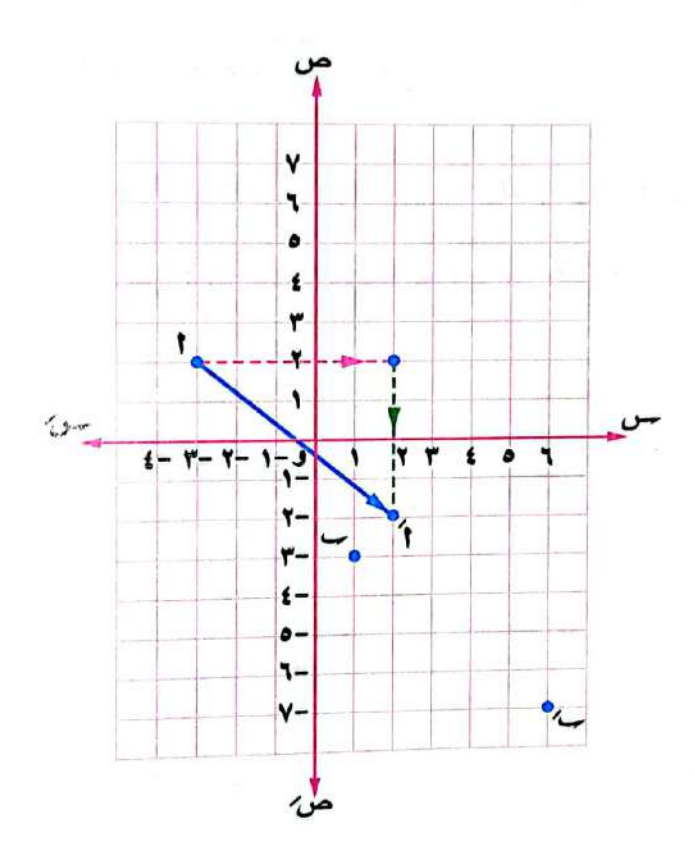
مثال ٦

إذا كانت صورة النقطة أ (−٣ ، ٢) بالانتقال هى أَ (٢ ، −٢)

١ أوجد قاعدة الانتقال.

٢ أوجد صورة ب (١ ، −٣) بنفس الانتقال.

الحل



١ بملاحظة الشكل نجد أن :

الانتقال الذى يجعل أَ (٢ ، −٢) صورة أ (−٣ ، ٢) يكافئ :

- إزاحة أفقية ٥ وحدات لليمين (٥)
- إزاحة رأسية ٤ وحدات لأسفل (−٤)

∴ قاعدة الانتقال هى : (س ، ص) ⟵ (س + ٥ ، ص − ٤)

٢ ب (١ ، −٣) ⟵ بَ (١ + ٥ ، −٣ − ٤) أى أن : بَ (٦ ، −٧)

مثال ٧

إذا كانت : أَ (٧ ، −٢) هى صورة أ بالانتقال الذى قاعدته :

(س ، ص) ⟵ (س − ٣ ، ص + ١) فأوجد النقطة أ

الحـــل

بفرض أن : أ (س ، ص) ∴ أ (س ، ص) ⟵ أَ (س − ٣ ، ص + ١)

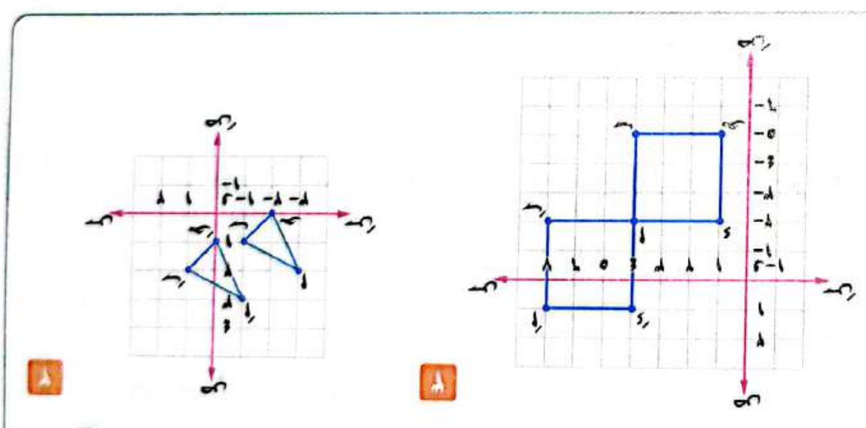
، ∵ أَ (٧ ، −٢) أى أن : (س − ٣ ، ص + ١) = (٧ ، −٢)

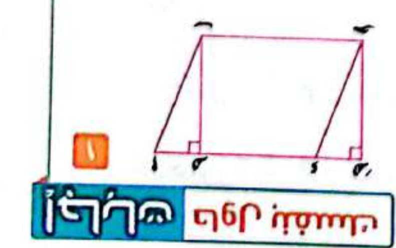
∴ س − ٣ = ٧ ∴ س = ١٠

، ص + ١ = −٢ ∴ ص = −٣

∴ أ (١٠ ، −٣)

> **لاحظ أن :**
> إذا كان : (س ، ص) = (أ ، ب)
> فإن : س = أ ، ص = ب







تمارين 11
على الانتقال





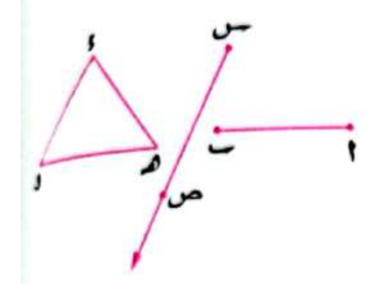
أولاً مسائل على الانتقال فى المستوى

١ فى الشكل المقابل :

باستخدام الأدوات الهندسية

ارسم صورة كل من الشكلين المقابلين

بالانتقال مسافة سـ ص فى اتجاه $\overleftarrow{\text{سـ ص}}$



---

٢ ارسم القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ التى طولها ٥ سم

ثم ارسم صورتها بانتقال ٨ سم فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$

---

٣ باستخدام الأدوات الهندسية ارسم المربع أ ب حـ ء الذى طول ضلعه ٤ سم

ثم ارسم صورته بالانتقال مسافة ٤ سم فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$

---

٤ ارسم المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم ، حـ أ = ٥ سم



ثم ارسم صورته بانتقال ٣ سم فى اتجاه $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$

---

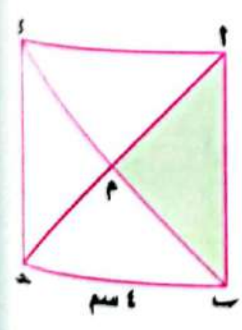
٥ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٤ سم تقاطع قطراه فى م

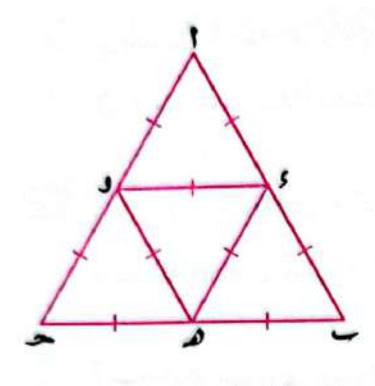
ارسم :

١ صورة Δ م أ ب بانتقال ٢ سم فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أء}}$

٢ صورة Δ أ م ب بانتقال أ م فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أم}}$



٦ في الشكل المقابل :



المثلثات ا ء و ، ء ب هـ ، ء هـ و ، و هـ حـ متطابقة

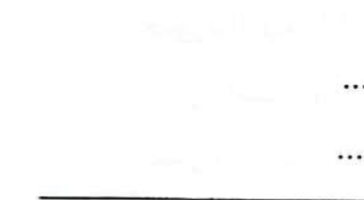
أكمل ما يأتى :

١ صورة Δ ا ء و بانتقال مسافة ا ء فى اتجاه ا ء

هى ....

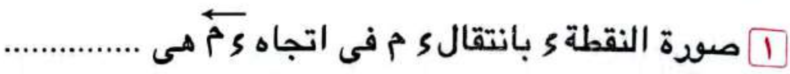
٢ Δ و هـ حـ هو صورة Δ ء ب هـ بانتقال مسافة .... فى اتجاه ....

٧ في الشكل المقابل :



ا ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم

أكمل ما يأتى :



١ صورة النقطة ء بانتقال ء م فى اتجاه ء م هى ....

٢ صورة ا و بانتقال هـ ء فى اتجاه هـ ء هى ....

٣ صورة Δ م حـ ء بانتقال هـ و فى اتجاه هـ و هى ....

٤ الانتقال الذى يجعل Δ ء م هـ صورة Δ م ا و هو ....

٨ في الشكل المقابل :

ا ب حـ ء مربع ، جميع المربعات بداخله متطابقة

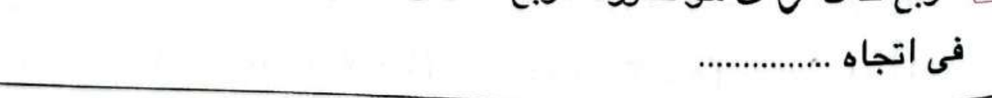
أكمل ما يأتى :

١ صورة ا هـ بانتقال مسافة ٢ سم فى اتجاه ق ك

هى ....

٢ صورة المربع ا هـ ن ط بانتقال مسافة ٤ سم فى اتجاه ى ك هى ....

٣ المربع ط ن ر ى هو صورة المربع ق ل ع ك بانتقال مسافة .... سم



فى اتجاه ....

٩ ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : ا ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم

ارسم Δ اَ بَ حَ صورة Δ ا ب حـ بانتقال مقداره ٣ سم فى اتجاه حـ ب

برهن أن : الشكل ا اَ حَ حـ متوازى أضلاع.

١٠ ارسم Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، فيه : أ ب = ب حـ = ٣ سم ثم ارسم صورة Δ أ ب حـ بانتقال مقداره ٣ سم فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$ وبرهن أن : الشكل ب بَ حَ حـ مربع.

١١ أ ب حـ ء مستطيل ، هـ ∈ $\overline{أء}$ ارسم صورة Δ أ ب هـ بانتقال مسافة ء أ فى اتجاه $\overrightarrow{أء}$ وإذا كانت النقطة هـَ صورة النقطة هـ بهذا الانتقال فبرهن أن الشكل ب حـ هـَ هـ متوازى أضلاع.

١٢ أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، $\overleftrightarrow{بهـ} \perp \overline{أء}$ يقطعه فى هـ ارسم Δ أَ بَ ءَ صورة Δ أ ب هـ بانتقال مسافة هـ ء فى اتجاه $\overrightarrow{أء}$ وبرهن أن : الشكل هـ ب بَ ء مستطيل.

ثانيًا مسائل على الانتقال فى المستوى الإحداثى

١ أكمل ما يأتى :

١ صورة النقطة (٢ ، ٥) بانتقال : (س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص + ١) هى ....

٢ صورة النقطة (٣ ، ٢) بانتقال : (س ، ص) ⟵ (س + ٣ ، ص – ٢) هى ....

٣ صورة النقطة (–٥ ، ٤) بانتقال : (س ، ص) ⟵ (س + ٤ ، ص – ٥) هى ....

٤ صورة النقطة (–٢ ، –٥) بانتقال : (س ، ص) ⟵ (س – ٢ ، ص) هى ....

٥ صورة النقطة (٣ ، –٢) بانتقال : (س ، ص) ⟵ (س ، ص + ٣) هى ....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ صورة النقطة (–١ ، ٢) بانتقال مقداره ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور السينات هى ....

(أ) (–١ ، ٥) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (–٢ ، ٢) (د) (–١ ، ٣)

٢ صورة النقطة (–٣ ، ٤) بانتقال مقداره ٤ وحدات فى الاتجاه السالب لمحور الصادات هى ....

(أ) (–٣ ، ٠) (ب) (–٧ ، ٤) (جـ) (–٣ ، ٨) (د) (–١ ، ٤)

٣ إذا كانت : أَ (٣ ، –٣) هى صورة أ بانتقال : (س ، ص) ⟵ (س – ١ ، ص – ٤) فإن النقطة أ هى ....

(أ) (٢ ، –٧) (ب) (٤ ، ١) (جـ) (–٤ ، –١) (د) (٢ ، ١)

٤ صورة النقطة (–١ ، ٤) بالانتقال : (٣ ، –٢) متبوعًا بالانعكاس فى محور السينات

هى ....

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (–٢ ، ٢) (جـ) (–٢ ، –٢) (د) (٢ ، –٢)

٥ إذا كانت : (أ ، –١) هى صورة (٢ ، ٤) بالانتقال :

(س ، ص) ⟵ (س + ١ ، ص – ب) فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٣ ، ٣) (ب) (١ ، ٣) (جـ) (٣ ، ٥) (د) (١ ، –٥)

٦ إذا كانت أَ صورة أ (٢ ، ٣) بالانعكاس فى محور الصادات

فإن أ صورة أَ بانتقال ....

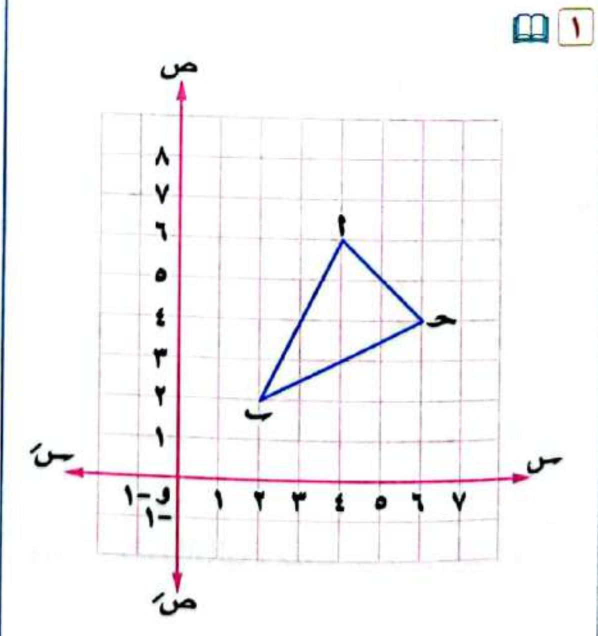
(أ) (س ، ص) ⟵ (س + ٤ ، ص) (ب) (س ، ص) ⟵ (س ، ص + ٦)

(جـ) (س ، ص) ⟵ (س – ٤ ، ص) (د) (س ، ص) ⟵ (س ، ص – ٦)

---

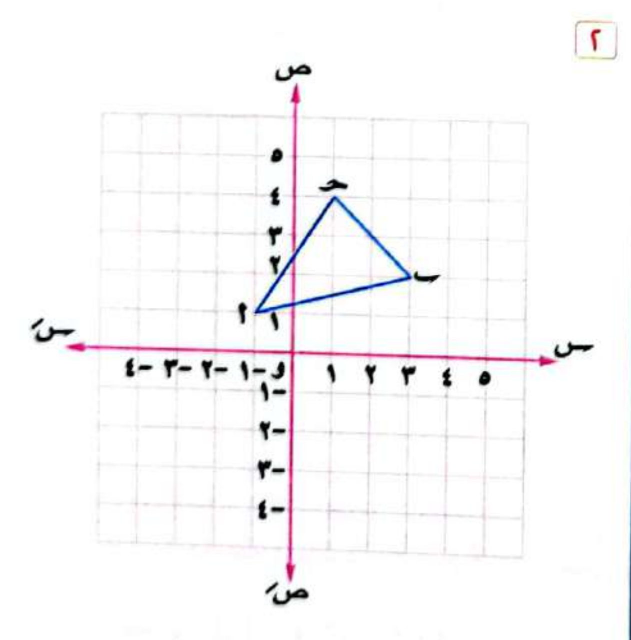
٣ ارسم صورة كل من الشكلين الآتيين بالانتقال الموضح أسفل كل شكل :

١



(س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص + ٣)

٢

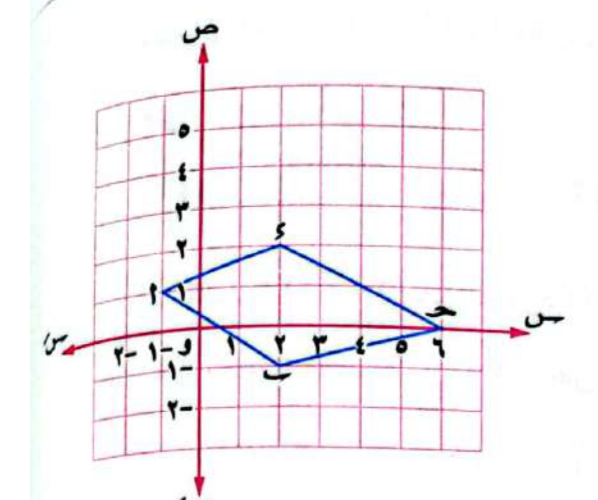


(س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص)

٤ ارسم صورة الشكل أ ب حـ ء

المرسوم على الشبكة التربيعية

بكل انتقال مما يأتى :



١ (س ، ص) ⟵ (س + ٥ ، ص + ٢)

٢ (س ، ص) ⟵ (س − ٨ ، ص − ١)

٣ (س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص − ٤)

٤ (س ، ص) ⟵ (س − ٤ ، ص + ٢)

---

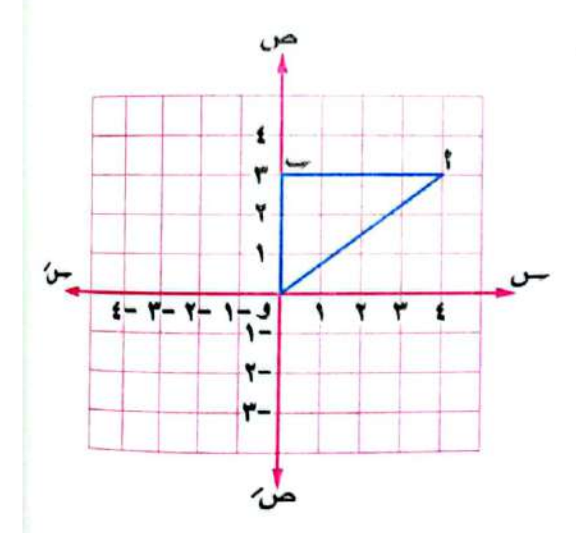
٥ باستخدام الشبكة التربيعية ارسم Δ و ب حـ حيث و نقطة الأصل ، ب (٣ ، ٠)

، حـ (٠ ، ٢) ثم ارسم صورته بالانتقال : (س ، ص) ⟵ (س − ٤ ، ص + ١)

---

٦ ارسم صورة Δ أ و ب :

بانتقال أ و فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ و}}$



---

٧ باستخدام شبكة تربيعية أوجد صورة كل من النقط التالية بانتقال ل م فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ل م}}$

حيث : ل (١ ، ٣) ، م (٤ ، ٥)

١ أ (−٢ ، ٣)　　٢ ب (٥ ، ٤)　　٣ حـ (٣ ، ٠)

٨ ارسم على ورق المربعات المثلث أ ب حـ حيث : أ (٢ ، ١) ، ب (١ ، -١) ، حـ (٠ ، ١)
ثم ارسم صورته بانتقال ٢ أ ب فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$

---

٩ إذا كانت إحداثيات رءوس المربع أ ب حـ ء هى :
أ (١ ، ١) ، ب (٤ ، ٢) ، حـ (٣ ، ٥) ، ء (٠ ، ٤)

١ ارسم المربع وصورته بانتقال أ ب فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$

٢ اكتب قاعدة الانتقال.

---

١٠ بتطبيق الانتقال الذى يحول النقطة (س ، ص) إلى النقطة (س + ٢ ، ص + ٣)
أوجد النقطة التى صورتها (٢ ، ٣)

---

١١ إذا كانت صورة النقطة أ (١ ، ١) بالانتقال فى المستوى الإحداثى هى أ َ(٢ ، ٢)
أوجد صور النقط التالية بنفس الانتقال : و (٠ ، ٠) ، ب (-١ ، ٣) ، حـ (-٣ ، ٥)

---

١٢ إذا كان : أ (-٣ ، ١) ، ب (١ ، -٢) اكتب قاعدة الانتقال الذى يجعل ب صورة أ

---

١٣ إذا كانت : أ (٣ ، ٢) ، ب (٥ ، ١) أوجد :

١ حـَ صورة حـ (١ ، -١) بانتقال أ ب فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$

٢ ء التى صورتها ءَ (٢ ، ١) بانتقال أ ب فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$

---

١٤ إذا كانت النقطة : أَ (٣ ، -٣) صورة النقطة أ بانتقال قاعدته :
(س ، ص) ⟵ (س - ١ ، ص - ٤) ارسم النقطة أ وصورتها أَ على الشبكة التربيعية
وبنفس الانتقال ارسم صورة المثلث أ ب حـ حيث : ب (٥ ، ٠) ، حـ (-١ ، -٢)

١٥ في الشكل المقابل :

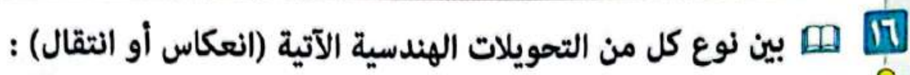
إذا كان Δ أَ بَ حَ

صورة Δ أ ب حـ

بانتقال :

(س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص + ٣)

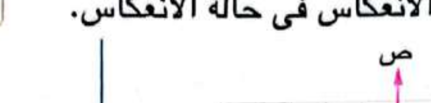
ارسم Δ أ ب حـ

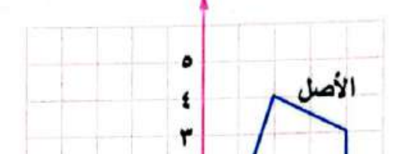


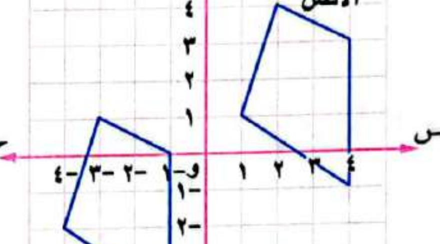
١٦ بين نوع كل من التحويلات الهندسية الآتية (انعكاس أو انتقال) :

[١] أوجد محور الانعكاس فى حالة الانعكاس.

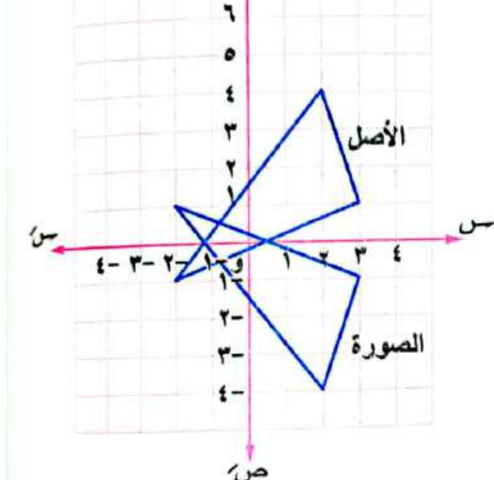
[٢] صف الانتقال فى حالة الانتقال.



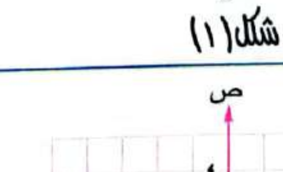




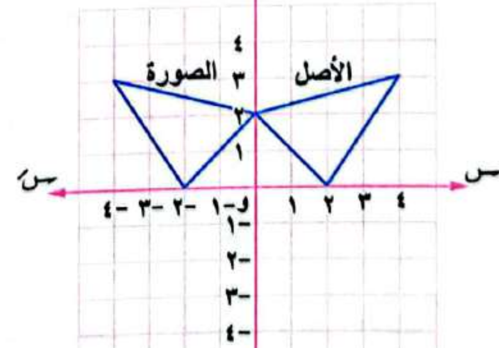
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

للمتفوقين

١٧ ارسم Δ أ ب حـ على الشبكة التربيعية حيث : أ (٤ ، ٤) ، ب (٤ ، ٢) ، حـ (١ ، ٢)

ثم ارسم صورته بالانتقال مسافة ٣ أ ب فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

---

١٨ إذا كانت : أ (٢ ، ١) صورة النقطة ب بالانعكاس فى محور السينات متبوعًا بالانعكاس فى محور الصادات فعين الانتقال الذى يجعل النقطة أ صورة النقطة ب

الدرس 12 الـــدوران



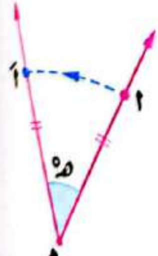
تمهيد



إذا وقفت فى الملاهى أمام لعبة العربات الدائرة تجد أن العربة الواحدة تتحرك حركة دائرية حول نقطة ثابتة فى اتجاه حركة عقارب الساعة ↷ أو ضد اتجاه حركة عقارب الساعة ↶ هذه الحركة تسمى «دوران».

تعريف الدوران

إذا كانت م نقطة ثابتة فى المستوى فإن الدوران حول م بزاوية قياسها هـ° هو تحويلة هندسية تحول كل نقطة أ فى المستوى إلى نقطة أخرى أَ فى نفس المستوى



بحيث : ق (∠ أ م أَ) = هـ° ، م أ = م أَ

هذا الدوران يُرمز له بالرمز د (م ، هـ°)

حيث : • م مركز الدوران.

• هـ قياس زاوية الدوران.

• بناءً على هذا التعريف فإن الدوران يتحدد تمامًا بالعناصر الآتية :

1. مركز الدوران.
2. قياس زاوية الدوران (هـ°)
3. اتجاه الدوران.

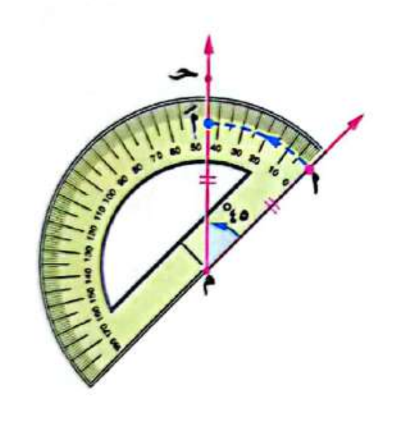
إذا كان قياس زاوية الدوران



الدوران فى المستوى

إيجاد صورة نقطة بدوران معلوم

أولًا : إيجاد صورة النقطة أ بالدوران حول نقطة م بزاوية قياسها ٤٥° أى د (م ، ٤٥°) :

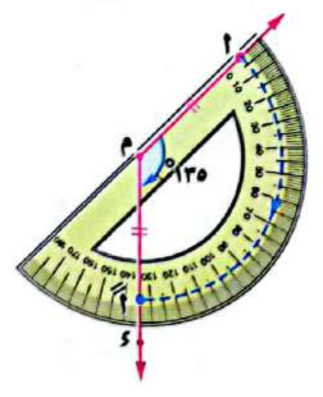


• نرسم الشعاع $\overrightarrow{\text{م أ}}$

• نركز بحرف المنقلة على $\overrightarrow{\text{م أ}}$
وفى عكس اتجاه حركة عقارب الساعة نرسم $\overrightarrow{\text{م حـ}}$ بحيث يكون ق (∠ أ م حـ) = ٤٥°

• نركز بسن الفرجار عند م وبفتحة طولها م أ
نرسم قوسًا يقطع $\overrightarrow{\text{م حـ}}$ فى أَ
فتكون أَ هى صورة أ بالدوران حول م بزاوية قياسها ٤٥°

ثانيًا : إيجاد صورة النقطة أ بالدوران حول نقطة م بزاوية قياسها (-١٣٥°) أى د (م ، -١٣٥°) :



• نكرر نفس الخطوات السابقة
بأن نرسم $\overrightarrow{\text{م ء}}$ فى اتجاه حركة عقارب الساعة
بحيث : ق (∠ أ م ء) = ١٣٥°
ونعين عليه نقطة أَ بحيث م أَ = م أ
فتكون أَ هى صورة أ بالدوران حول م
بزاوية قياسها (-١٣٥°)

ملاحظة

إذا كانت : أَ هى صورة أ بدوران حول م بزاوية قياسها هـ°

فإن : أ هى صورة أَ بدوران حول م بزاوية قياسها (− هـ°)

إيجاد صورة مضلع بدوران معلوم

الشكل المقابل يوضح كيفية إيجاد صورة Δ أ ب ح بالدوران د (أ ، −١٢٠°) وذلك بإيجاد صورة كل رأس من رءوسه فيكون Δ أ بَ حَ صورة Δ أ ب ح بالدوران د (أ ، −١٢٠°)

لاحظ أن : Δ أ بَ حَ $\equiv$ Δ أ ب ح

ملاحظة

فى الرسم السابق صورة أ بالدوران د (أ ، −١٢٠°) هى نفسها لأنها مركز الدوران.

خواص الدوران

من خلال دراستنا للدوران وجدنا أن الدوران هو تحويلة هندسية تحول الشكل الهندسى إلى شكل مطابق له ولذلك يقال إن : الدوران فى المستوى هو تساوى قياسى.

ومن ذلك يمكن استنتاج بعض خواص الدوران وإضافة خواص أخرى من خلال عرضنا للمثال التوضيحى التالى :

مثال توضيحى

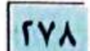
فى الشكل المقابل :

أ ب ح ء مربع ، قطراه متقاطعان فى م ،س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاعه $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب ح}$ ، $\overline{ح ء}$ ، $\overline{ء أ}$ على الترتيب أوجد :

١ صورة Δ أ س م بالدوران د (م ، ٩٠°) واذكر ماذا تلاحظ.

٢ صورة كل من : $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ء ح}$ بالدوران د (م ، −٩٠°) واذكر ماذا تلاحظ.

٣ صورة كل من : ب ، ص ، ح بالدوران د (م ، ١٨٠°) واذكر ماذا تلاحظ.



الحـل

١ ∵ ء صورة أ بالدوران د (م ، ٩٠°) ، ل صورة ب بالدوران د (م ، ٩٠°)

، م هى نفسها (مركز الدوران) ∴ Δ ء ل م صورة Δ أ ب م بالدوران د (م ، ٩٠°)

نلاحظ أن :		
ء ل = أ ب ، ل م = ب م ، ء م = أ م	أى أن	الدوران فى المستوى يحافظ على أطوال القطع المستقيمة.
ق (∠ ء ل م) = ق (∠ أ ب م) ، ق (∠ ل ء م) = ق (∠ ب أ م) ، ق (∠ ء م ل) = ق (∠ أ م ب)	أى أن	الدوران فى المستوى يحافظ على قياسات الزوايا.
قراءة Δ أ ب م تسير مع اتجاه دوران عقارب الساعة وكذلك قراءة Δ ء ل م تسير مع اتجاه دوران عقارب الساعة.	أى أن	الدوران فى المستوى يحافظ على الاتجاه الدورانى لترتيب رؤوس الشكل.

٢ ∵ ب صورة أ بالدوران د (م ، −٩٠°) ، حـ صورة ب بالدوران د (م ، −٩٠°)

∴ $\overline{\text{ب حـ}}$ صورة $\overline{\text{أ ب}}$ بالدوران د (م ، −٩٠°)

، ∵ أ صورة ء بالدوران د (م ، −٩٠°) ، ء صورة حـ بالدوران د (م ، −٩٠°)

∴ $\overline{\text{أ ء}}$ صورة $\overline{\text{ء حـ}}$ بالدوران د (م ، −٩٠°)

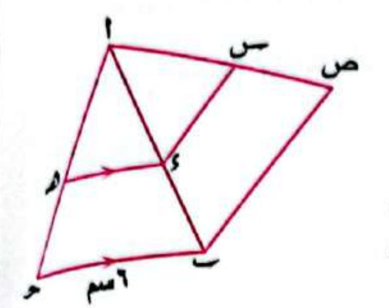
نلاحظ أن :		
$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$	أى أن	الدوران فى المستوى يحافظ على التوازى.

٣ ء صورة ب ، ل صورة ص ، أ صورة حـ بالدوران د (م ، ١٨٠°)

نلاحظ أن :		
ص ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ل (صورة ص) ∈ $\overline{\text{أ ء}}$	أى أن	الدوران فى المستوى يحافظ على البينية.
ب ، ص ، حـ على استقامة واحدة ، ء ، ل ، أ على استقامة واحدة أيضًا.	أى أن	الدوران فى المستوى يحافظ على استقامة النقط.

مثال ١

في الشكل المقابل :



إذا كان الشكل س ص ب ء صورة الشكل ء ب حـ هـ

بالدوران د (أ ، ٥٠°) ، ب حـ = ٦ سم ، ءهـ // ب حـ

١ أوجد : طول ب ص ٢ أثبت أن : ء س // ب ص

الحل

∵ الشكل س ص ب ء صورة الشكل ء ب حـ هـ بالدوران د (أ ، ٥٠°)

∴ ب صورة حـ ، ص صورة ب بهذا الدوران.

∴ ب ص صورة حـ ب بهذا الدوران.

∴ ب ص = حـ ب = ٦ سم (المطلوب أولاً)

∵ الشكل س ص ب ء صورة الشكل ء ب حـ هـ بالدوران د (أ ، ٥٠°)

∴ س ء ، ص ب صورتا ءهـ ، ب حـ على الترتيب بهذا الدوران.

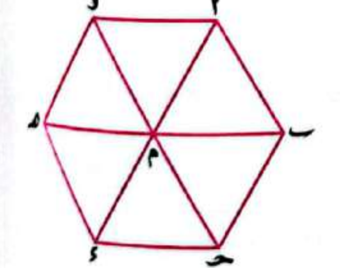
، ∵ ءهـ // ب حـ

∴ س ء // ب ص (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك ١

في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم أكمل ما يأتي :



١ صورة النقطة أ بدوران حول م قياس زاويته ١٨٠°

هي ....

٢ صورة أ ب بدوران حول م قياس زاويته (-٦٠°)

هي ....

٣ صورة △ حـ م ء بدوران حول م قياس زاويته ١٢٠°

هي ....

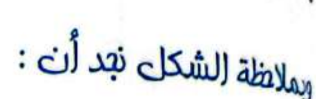
الدوران فى المستوى الإحداثى

أولًا : الدوران بزاوية قياسها ٩٠° حول نقطة الأصل و :

الشكل المقابل يبين صورتى النقطتين :

أ(٣ ، ١) ، ب(-٢ ، ١)

بالدوران د (و ، ٩٠°) بالطريقة التى سبق دراستها.



وبملاحظة الشكل نجد أن :

• صورة النقطة أ (٣ ، ١) ——بالدوران د (و ، ٩٠°)——> النقطة أَ (-١ ، ٣)

• صورة النقطة ب (-٢ ، ١) ——بالدوران د (و ، ٩٠°)——> النقطة بَ (-١ ، -٢)

مما سبق نستنتج القاعدة الآتية :

> صورة النقطة (س ، ص) ——بالدوران د (و ، ٩٠°)——> النقطة (- ص ، س)

ملاحظتان

١ صورة النقطة (س ، ص) ——بالدوران د (و ، -٩٠°)——> النقطة (ص ، - س)

فمثلًا : صورة النقطة (٢ ، -٣) ——بالدوران د (و ، -٩٠°)——> النقطة (-٣ ، -٢)

٢ الدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٢٧٠° يكافئ الدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها (-٩٠°)

فمثلًا : صورة النقطة (٢ ، -٣) ——بالدوران د (و ، ٢٧٠°)——> النقطة (-٣ ، -٢)

ثانيًا : الدوران بزاوية قياسها ١٨٠° حول نقطة الأصل و :

الشكل المقابل يبين صورتى النقطتين :

أ (٣ ، ١) ، ب (−٢ ، ١)

بالدوران د (و ، ١٨٠°)

بالطريقة التى سبق دراستها.


وبملاحظة الشكل نجد أن :

• صورة النقطة أ (٣ ، ١) ← بالدوران د (و ، ١٨٠°) ← النقطة أ َ (−٣ ، −١)

• صورة النقطة ب (−٢ ، ١) ← بالدوران د (و ، ١٨٠°) ← النقطة بَ (٢ ، −١)

مما سبق نستنتج القاعدة الآتية :

> صورة النقطة (س ، ص) ← بالدوران د (و ، ١٨٠°) ← النقطة (− س ، − ص)

ملاحظات

١ صورة النقطة أ (س ، ص) بالدوران د (و ، ١٨٠°) هى نفسها صورة النقطة أ بالدوران د (و ، −١٨٠°)

٢ صورة النقطة أ (س ، ص) بدوران بزاوية قياسها ± ٣٦٠° حول نقطة الأصل هى نفسها النقطة أ (س ، ص)

٣ الدوران بزاوية قياسها ٩٠° يُسمى **دوران ربع دورة.**

٤ الدوران بزاوية قياسها ١٨٠° يُسمى **دوران نصف دورة.**

٥ الدوران بزاوية قياسها ٣٦٠° يسمى **بالدوران المحايد** لأنه يعيد الشكل لوضعه الأصلى.

مثال ٢

أكمل الجدول التالى :

	النقطة	صورتها بالدوران د (و ، ± ١٨٠°)	صورتها بالدوران د (و ، ٩٠°)
١	(٣ ، ٢)	....	....
٢	(-٣ ، ٤)	....	....
٣	(-٢ ، -١)	....	....
٤	....	(٥ ، -٢)	....
٥	....	....	(٦ ، ٠)

الحـــل

١ (-٣ ، -٢) ، (-٢ ، ٣) | ٢ (٣ ، -٤) ، (-٤ ، -٣) | ٣ (٢ ، ١) ، (١ ، -٢)

٤ (-٥ ، ٢) ، (-٢ ، -٥) | ٥ (٠ ، -٦) ، (٠ ، ٦)

مثال ٣

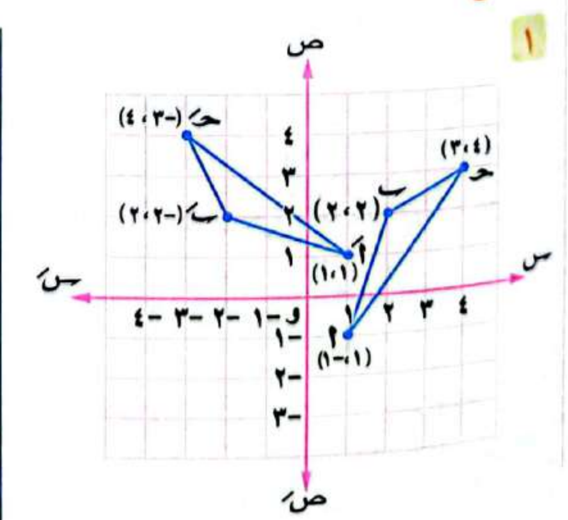
ارسم على شبكة تربيعية △ أ ب حـ حيث : أ (١ ، -١) ، ب (٢ ، ٢) ، حـ (٤ ، ٣)

١ ارسم △ أَ بَ حَ صورة △ أ ب حـ بالدوران د (و ، ٩٠°)

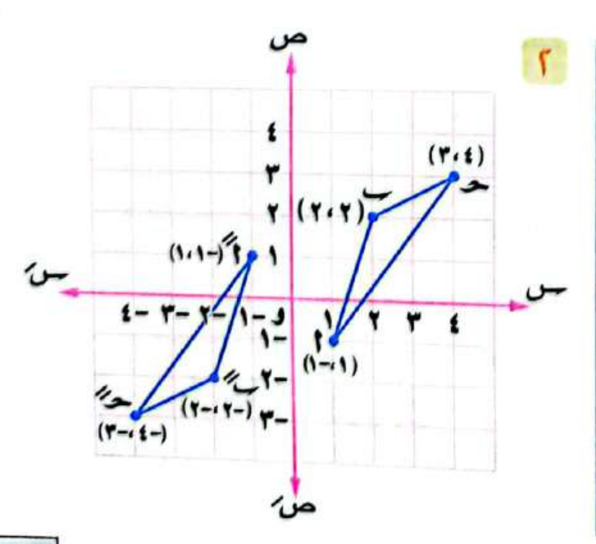
٢ ارسم △ أً بً حً صورة △ أ ب حـ بالدوران د (و ، ١٨٠°)

الحـــل

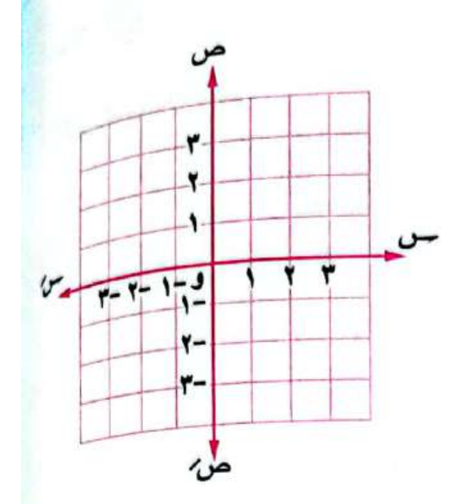
١



٢



حاول بنفسك ٢



في الشكل المقابل :

على الشبكة التربيعية المتعامدة ارسم $\overline{أب}$

حيث : أ (٢ ، ١) ، ب (١ ، ٣)

ثم ارسم صورتها بالدوران :

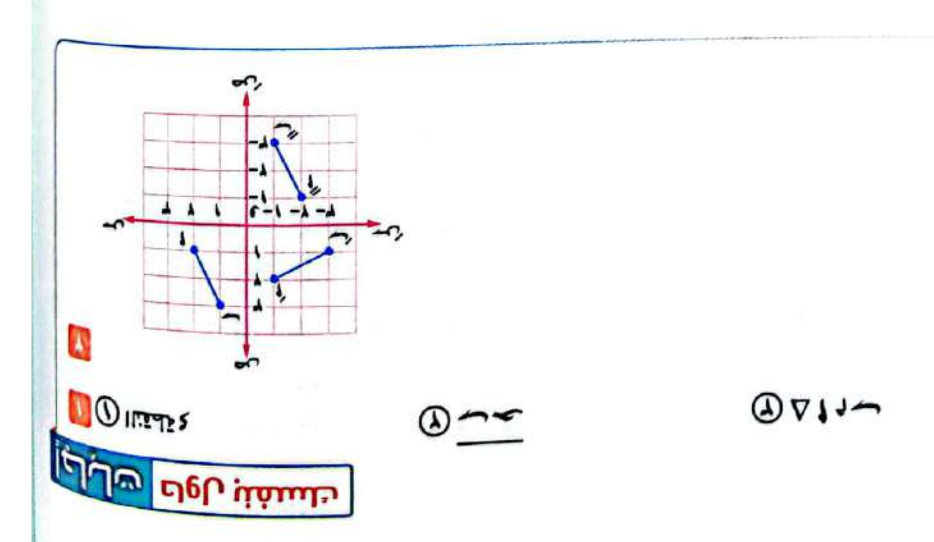
١ د (و ، ٩٠°)

٢ د (و ، ١٨٠°)

خداع بصرى



انظر إلى الصورة ثم أدر الكتاب
بزاوية قياسها ١٨٠°
وانظر إلى الصورة مرة أخرى.
ماذا تلاحظ ؟!



تمارين 12 على الدوران



اختبار تفاعلى

• تذكر • فهم ○ تطبيق ∴ حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

أولاً مسائل على الدوران فى المستوى

1 باستخدام الأدوات الهندسية ارسم $\overline{أب}$ طولها ٣ سم ، ثم ارسم صورتها بالدوران د (ب ، ١٣٥°)

---

2 ارسم المثلث أ ب حـ المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٦ سم ، ارسم صورة المثلث أ ب حـ بدوران د (أ ، ٦٠°)

---

3 ارسم المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ٦ سم ، حـ أ = ٧ سم
ثم ارسم صورة المثلث أ ب حـ :

١ بدوران د (أ ، ١٨٠°) ٢ بدوران د (أ ، ٣٦٠°)

---

4 ارسم المثلث س ص ع الذى فيه : س ص = س ع = ٣ سم ، ص ع = ٤ سم
ثم ارسم صورة △ س ص ع فى كل من الحالتين الآتيتين :

١ بدوران حول س بزاوية قياسها ٩٠°

٢ بدوران حول س بزاوية قياسها ٢٧٠°

---

5 ارسم △ أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ٣ سم ، ق(∠ أ) = ٤٠°
، ارسم حـَ صورة حـ بالدوران د (أ ، ٤٠°) ، بَ صورة ب بالدوران د (أ ، −٤٠°)

---

6 ارسم المربع أ ب حـ ء الذى طول ضلعه ٥ سم ثم ارسم صورة المربع أ ب حـ ء :

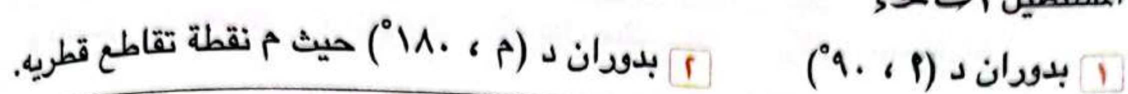
١ بدوران د (ب ، ٩٠°) ٢ بدوران د (أ ، ١٨٠°)

---

7 باستخدام الأدوات الهندسية ارسم المربع أ ب حـ ء طول ضلعه ٤ سم ثم ارسم صورته بالدوران حول مركزه (نقطة تقاطع قطريه) بزاوية قياسها ٩٠°

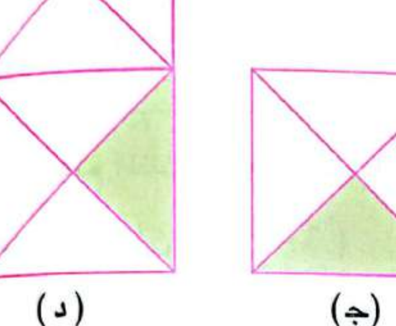
٨ ارسم المستطيل أ ب حـ ء الذى فيه : ب حـ = ٦ سم ، أ ب = ٤ سم ، ارسم صورة المستطيل أ ب حـ ء

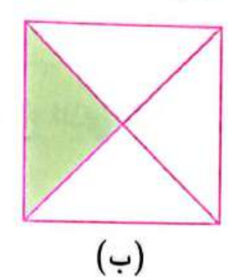
١ بدوران د (أ ، ٩٠°) **٢** بدوران د (م ، ١٨٠°) حيث م نقطة تقاطع قطريه.

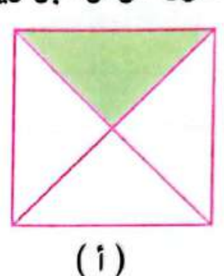


٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أى مما يأتى يمثل دوران المربع المقابل حول مركزه بزاوية قياسها ٢٧٠° ؟



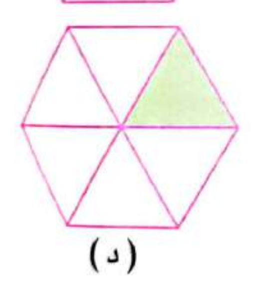


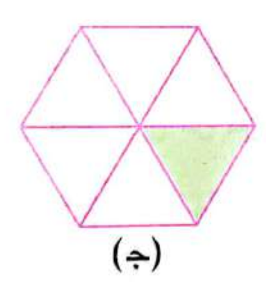


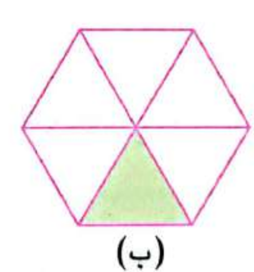


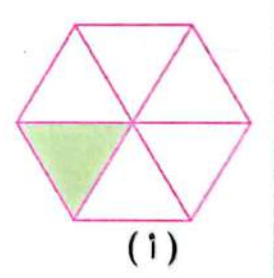
(أ) (ب) (جـ) (د)

٢ أى مما يأتى يمثل دوران المسدس المقابل حول مركزه بزاوية قياسها (-١٢٠°) ؟







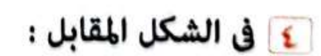


(أ) (ب) (جـ) (د)

٣ فى الشكل المقابل :

إذا كانت ب منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

فإن صورة $\overline{\text{أ حـ}}$ بدوران مركزه ب بزاوية قياسها ١٨٠° هى ....



(أ) $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ (ب) $\overline{\text{أ ب}}$ (جـ) $\overline{\text{حـ أ}}$ (د) $\overline{\text{حـ ب}}$

٤ فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{حـ ء}}$ صورة $\overline{\text{أ ب}}$ تحت تأثير دوران مركزه م

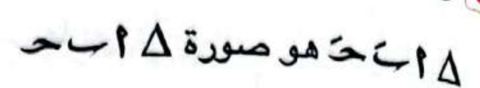
وقياس زاويته ....





(أ) ٧٥° (ب) ٣٠° (جـ) -٣٠° (د) -١٥٠°

٥ فى الشكل المقابل :



Δ أَبَحَ هو صورة Δ أب ح

بدوران حول أ قياس زاويته ....

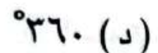


(أ) −١١٠° (ب) ٨٠° (جـ) ١١٠° (د) ١٤٠°

٦ فى الشكل المقابل :

Δ أب ح هو صورة Δ ء هـ ح القائم الزاوية فى ح

بدوران حول ح بزاوية قياسها ....



(أ) ٩٠° (ب) −٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٣٦٠°

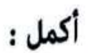
---

١٠ فى الشكل المقابل :



م دائرة طول نصف قطرها ٣ سم

، $\overline{أح}$ ، $\overline{بء}$ قطران متعامدان فيها.



أكمل :



١ بالدوران د (م ، ٩٠°) تكون صورة النقطة أ هى .... ، صورة النقطة ب هى ....

∴ صورة $\overline{أب}$ هى .... ، صورة $\overleftarrow{أب}$ هى ....

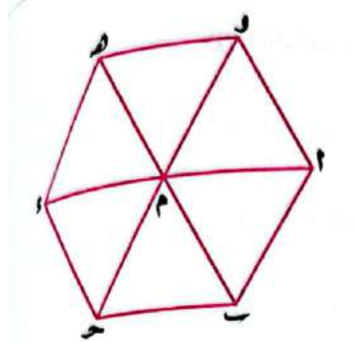
٢ بالدوران د (م ، −٩٠°) تكون صورة $\overline{أب}$ هى .... ، صورة $\overleftarrow{أب}$ هى ....

، صورة $\overleftrightarrow{أب}$ هى ....

٣ بالدوران د (م ، ١٨٠°) تكون صورة النقطة أ هى .... ، صورة النقطة ب هى ....

∴ صورة $\overline{أب}$ هى ....

٤ بالدوران د (م ، −١٨٠°) تكون صورة $\overline{أب}$ هى ....



١١ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم مركزه م ، أكمل ما يلي :

١ صورة النقطة هـ بدوران حول م قياس زاويته ١٢٠° هي ....

٢ صورة $\overline{أو}$ بدوران حول م قياس زاويته ١٨٠° هي ....

٣ صورة $\overline{ءهـ}$ بدوران حول م قياس زاويته (-٦٠°) هي ....

٤ صورة Δ م حـ ء بدوران حول م قياس زاويته ٣٠٠° هي ....

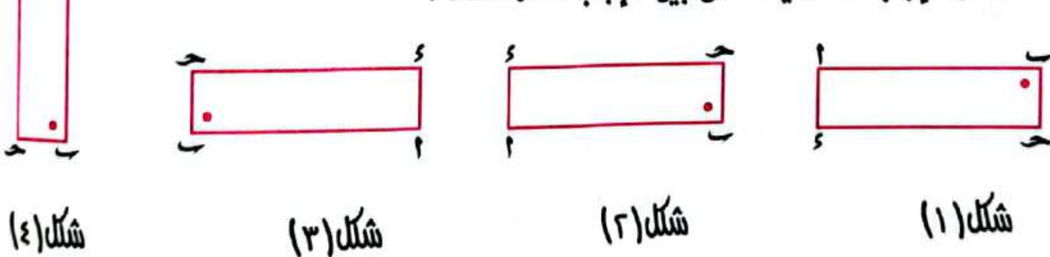
٥ Δ أ ب م صورة Δ حـ ء م بدوران حول نقطة .... بزاوية قياسها ....

٦ Δ ب م حـ صورة .... بدوران حول م بزاوية قياسها (-١٢٠°)

---

١٢ بالاستعانة بالشكل المقابل :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



١ صورة الشكل بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ءأ}$ هي ....

(أ) شكل (١) (ب) شكل (٢) (جـ) شكل (٣) (د) شكل (٤)

٢ صورة الشكل بالدوران حول أ بزاوية قياسها ٩٠° هي ....

(أ) شكل (١) (ب) شكل (٢) (جـ) شكل (٣) (د) شكل (٤)

٣ صورة الشكل بالانتقال لليمين هي ....

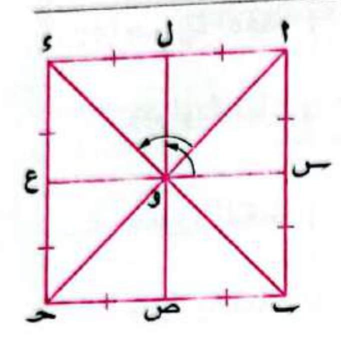
(أ) شكل (١) (ب) شكل (٢) (جـ) شكل (٣) (د) شكل (٤)

٤ صورة الشكل بالدوران بزاوية قياسها ١٨٠° حول أ هى ....

(أ) شكل (١) (ب) شكل (٢) (جـ) شكل (٣) (د) شكل (٤)

---

١٣ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع ، و نقطة تقاطع قطريه ، س ، ص ، ع ، ل

منتصفات أضلاعه $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$ على الترتيب

أوجد :

١ صورة Δ أ س و بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{أو}$ يتبعه انعكاس آخر فى $\overleftrightarrow{ل و}$

٢ صورة Δ أ س و بالدوران د (و ، ٩٠°)

---

١٤ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم أوجد :

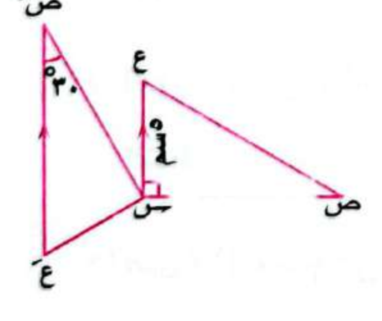
١ س صورة ب بانتقال مسافة ٩ سم فى اتجاه $\overleftarrow{ب أ}$

٢ ص صورة النقطة ب بالدوران د (أ ، −٩٠°)

٣ طول $\overline{س ص}$ «٦,٤ سم»

---

١٥ في الشكل المقابل :



إذا كانت النقطة س مركز الدوران بحيث يجعل صورة

ص هى صَ ، صورة ع هى عَ ، وكان $\overline{س ع}$ // $\overline{صَ عَ}$

أوجد :

١ قياس زاوية الدوران. ٢ طول $\overline{س عَ}$ «١٢٠° ، ٥ سم»

ثانيًا مسائل على الدوران في المستوى الإحداثي

١ أكمل ما يأتي :

١ صورة النقطة (٢ ، −٣) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هي ....

وبزاوية قياسها ١٨٠° هي ....

٢ صورة النقطة (−١ ، ٠) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هي ....

وبزاوية قياسها ٣٦٠° هي ....

٣ النقطة (٣ ، −٢) هي صورة النقطة (٢ ، ٣) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ....

٤ صورة النقطة .... بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هي (−١ ، ٤)

٥ صورة النقطة .... بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها (−١٨٠°) هي (٥ ، −٢)

٦ صورة النقطة (−٣ ، ٧) بالدوران بزاوية قياسها ٩٠° حول نقطة الأصل متبوعًا بانعكاس في محور الصادات هي ....

٧ صورة النقطة (−٢ ، ٠) بالانتقال : (س ، ص) ← (س + ٣ ، ص − ١) متبوعًا بدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هي ....

٨ الدوران بزاوية قياسها ٩٠° حول نقطة الأصل يرسم نقطة (س ، − ص) إلى النقطة ....

٩ صورة (أ ، ب) هي نفسها بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ....°

١٠ إذا كانت صورة النقطة (س ، ص) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هي (أ ، ب) فإن : أ + ص = ...

١ أكمل المخطط التالى :

صورة النقطة (٢ ، -١)

التحويل	الصورة
بالانعكاس فى محور السينات	النقطة ....
بالانعكاس فى محور الصادات	النقطة ....
بالانعكاس فى نقطة الأصل	النقطة ....
بالانتقال: (س، ص) ← (س -٣، ص +٤)	النقطة ....
بالدوران د (و ، ٩٠°)	النقطة ....
بالدوران د (و ، -٩٠°)	النقطة ....
بالدوران د (و ، ±١٨٠°)	النقطة ....
بالدوران د (و ، ±٣٦٠°)	النقطة ....

---

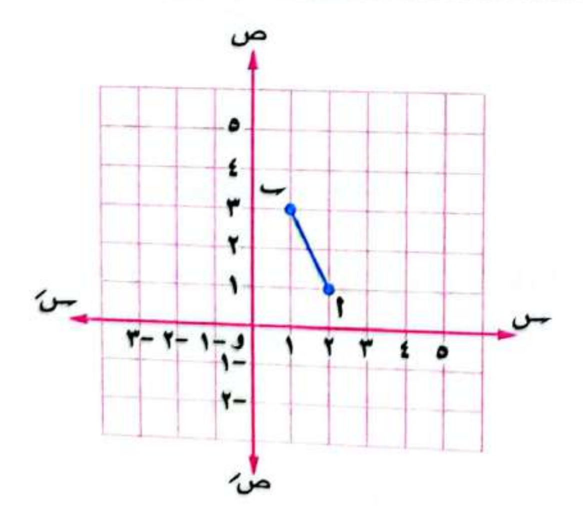
٢ فى الشكل المقابل :

النقطة أ (٢ ، ١) ، ب (١ ، ٣)

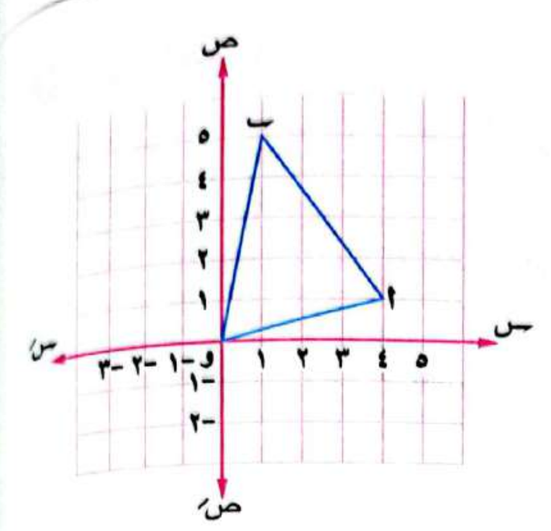
ارسم صورة $\overline{أب}$

بالدوران حول نقطة

الأصل بزاوية قياسها ٩٠°



٤ على الشبكة التربيعية :



ارسم صورة المثلث أ و ب بالدوران

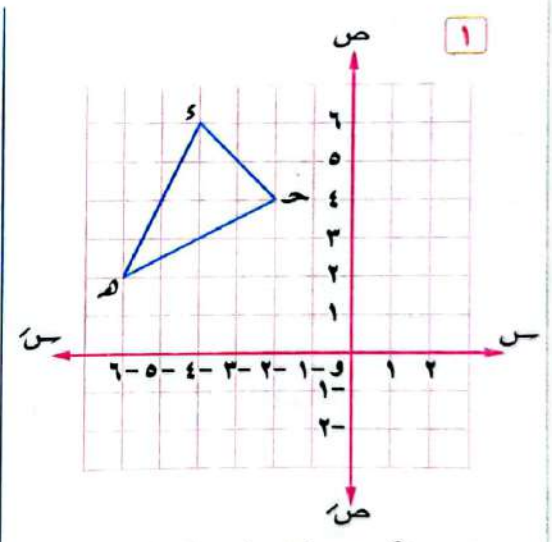
حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها :

١ ٩٠° **٢** ١٨٠°

---

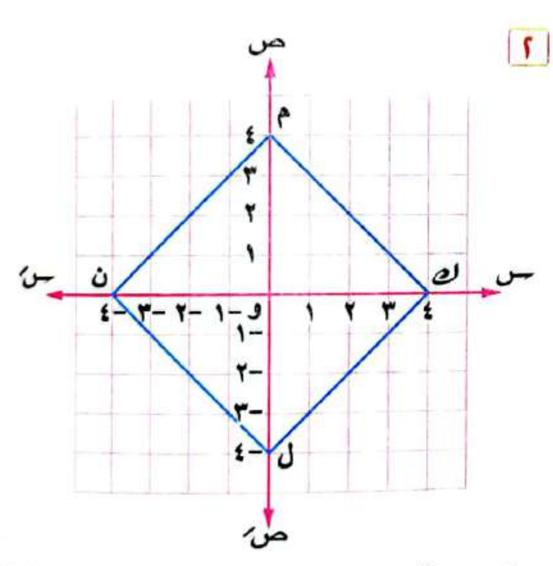
٥ انقل كل شكل مما يأتى على ورق المربعات ، وارسم صورة كل شكل بتحويل هندسى كما هو موضح أسفل كل شكل :

١



دوران ٩٠° مع حركة عقارب الساعة حول (و)

٢



دوران ٩٠° عكس حركة عقارب الساعة حول (و)

---

٦ ارسم على ورق المربعات Δ أ ب حـ حيث : أ (٣ ، -١) ، ب (٥ ، ٢) ، حـ (-٢ ، ٤)

ثم ارسم صورته بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ١٨٠°

---

٧ فى نظام إحداثى متعامد عين النقطتين : أ (٣ ، ٠) ، ب (٠ ، ٢) ثم ارسم صورة Δ أ و ب بالدوران حول و بزاوية قياسها ٩٠° حيث و نقطة الأصل.

٨ ارسم على ورق المربعات الشكل الرباعى أ ب حـ ء حيث : أ (٠ ، ٤) ، ب (٤ ، ٤) ، حـ (٧ ، ٠) ، ء (٠ ، ٠) ثم ارسم صورته :

١ بالدوران حول نقطة الأصل حيث : (س ، ص) ← (- ص ، س)

٢ بالدوران د (و ، -١٨٠°)

---

٩ إذا كانت صورة النقطة حـ بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هى حـَ (-٤ ، ٥) أوجد النقطة حـ ثم أوجد صورتها حـً بالدوران بزاوية قياسها ١٨٠° حول نقطة الأصل.

---

١٠ ارسم Δ أ ب حـ على الشبكة التربيعية حيث : أ (٤ ، ٤) ، ب (٤ ، ٢) ، حـ (١ ، ٢) ثم ارسم صورته بدوران مركزه ب وقياس زاويته ١٨٠°

---

١١ ارسم المستطيل أ ب حـ ء على المستوى الإحداثى حيث :
أ (٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ٢) ، حـ (٤ ، ٢) ، ء (٤ ، ٠)

أولاً : ارسم ٣ صور للمستطيل بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها :

١ ٩٠° ٢ ١٨٠° ٣ ٢٧٠°

ثانيًا : أوجد إحداثيى مركز المستطيل أ ب حـ ء

ثالثًا : ارسم ٣ صور للمستطيل بالدوران حول مركز المستطيل بزاوية قياسها :

١ ٩٠° ٢ ١٨٠° ٣ ٢٧٠°

للمتفوقين

١٢ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ ، أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم فإذا كان Δ حـ أَ بَ صورة Δ حـ أ ب بدوران مركزه حـ وقياس زاويته ١٨٠°

فأوجد : مساحة Δ أ أَ بَ

«١٢ سم٢»



مشروع بحثى

على الوحدة الثالثة

أهداف المشروع

- التعرف على نظرية فيثاغورث.
- إثبات نظرية فيثاغورث.
- استخدام نظرية فيثاغورث.
- ربط الرياضيات بالتاريخ.

المطلوب

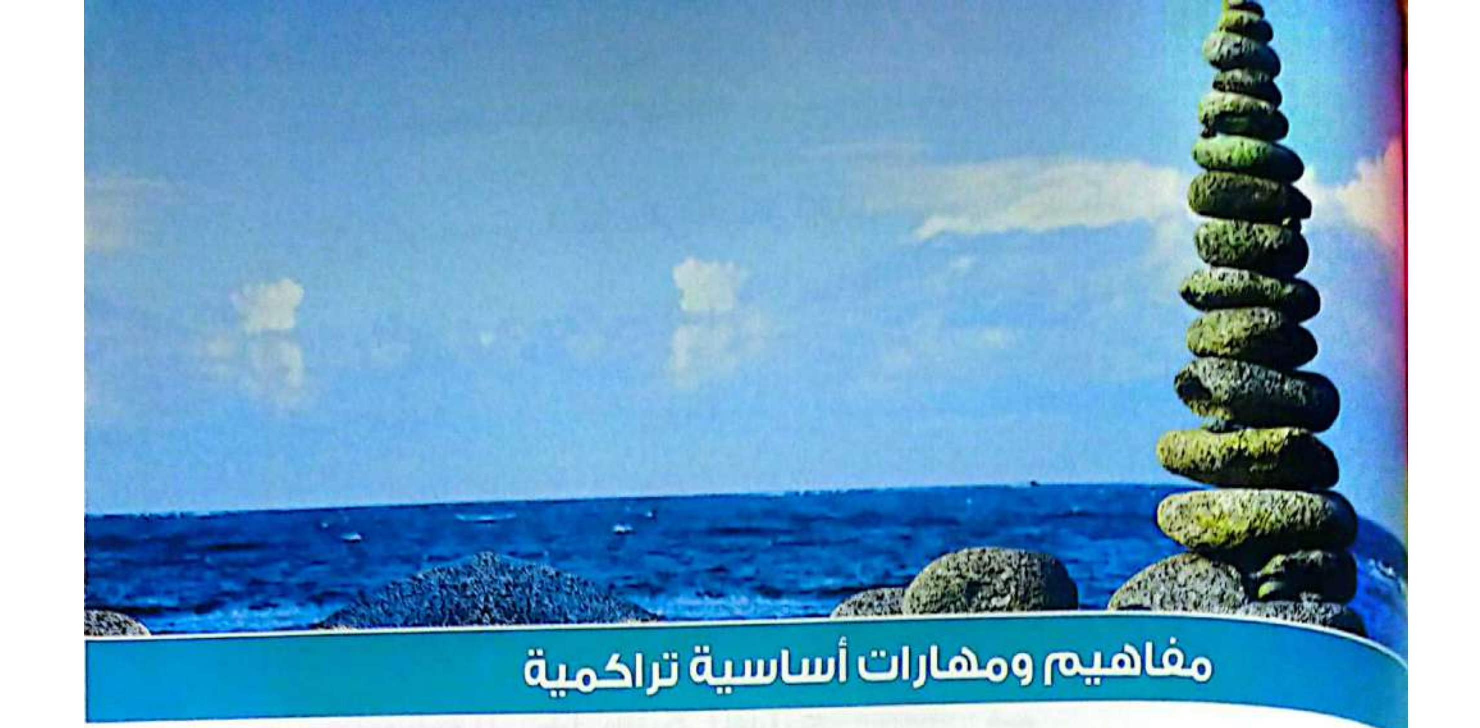
« تقدم المصريون القدماء فى علم الهندسة ، والدليل على ذلك بناء الأهرامات »

فى ضوء ذلك قُم بإعداد مشروع بحثى يتضمن ما يلى :

١) تكلم عن براعة المصريين القدماء فى علم الهندسة ، وكيف ظهر ذلك فى ما تركوه لنا من آثار باقية إلى يومنا هذا وبخاصة الهرم الأكبر الذى يعد أحد عجائب الدنيا.

٢) اكتب نبذة قصيرة عن كيفية استخدام قدماء المصريين لنظرية فيثاغورث.

٣) اكتب نبذة تاريخية عن العالم اليونانى فيثاغورث موضحًا نص نظريته الشهيرة الخاصة بالمثلث القائم الزاوية ثم قم بالبحث لإثبات صحة هذه النظرية.



مفاهيم ومهارات أساسية تراكمية

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مربع مساحته ١٤٤ سم^{٢} فإن محيطه = ... سم.

(أ) ١٢ (ب) ٤٨ (جـ) ٢٨٨ (د) ٥٧٦

٢ مستطيل طوله ٦ سم ومحيطه ١٦ سم فإن مساحته = ... سم^{٢}

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٦

٣ مكملة الزاوية التى قياسها ٣٠° هى زاوية قياسها ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

٤ أى من الأشكال الآتية يصلح أن يكون وحدة أساسية لتكوين دائرة ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

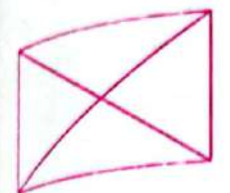
٥ مساحة الجزء المظلل من مساحة الشكل = ...

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{٣}{٨}$ (د) $\frac{٣}{٤}$



٦ أكبر عدد من المثلثات فى الشكل المقابل = ...



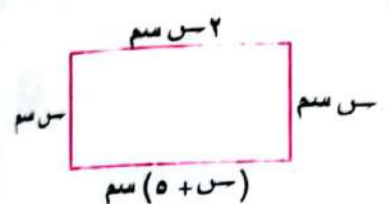
(أ) ٤　　(ب) ٦

(جـ) ٨　　(د) ١٠

٧ إذا كانت : س زاوية فإن : ق (∠ س) + ق (∠ س) المنعكسة = ...

(أ) قائمتان.　　(ب) ثلاث قوائم.　　(جـ) خمس قوائم.　　(د) أربع قوائم.

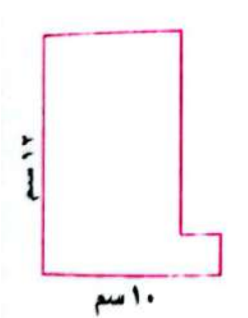
٨ مساحة المستطيل بالشكل المقابل = ... سم^{٢}.



(أ) ٥٠　　(ب) ٣٠

(جـ) ٢٠　　(د) ١٥

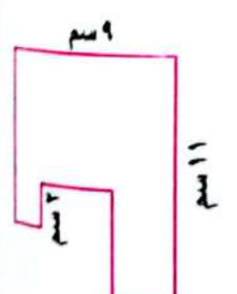
٩ محيط الشكل المقابل = ... سم.



(أ) ٢٢　　(ب) ٢٤

(جـ) ٤٤　　(د) ١٢٠

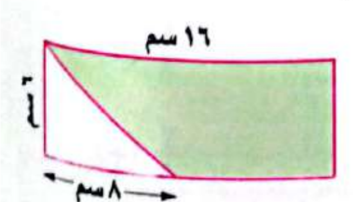
١٠ محيط الشكل المقابل = ... سم.



(أ) ٩٩　　(ب) ٤٤

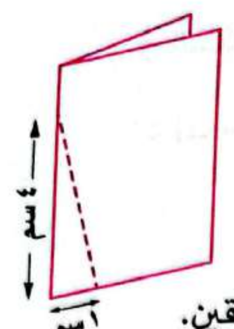
(جـ) ٢٢　　(د) ٢٠

١١ مساحة الجزء المظلل فى الشكل المقابل = ... سم^{٢}.



(أ) ٢٤　　(ب) ٤٤

(جـ) ٤٨　　(د) ٧٢



١٢ قطعة من الورق مستطيلة الشكل تم طيها كما بالشكل المقابل ثم تم قطع جزء منها على طول الخط المنقط ، عند فتح الجزء الصغير المقطوع فإنه سيكون على شكل ....

(أ) مثلث متساوى الأضلاع. (ب) مثلث متساوى الساقين.

(جـ) مثلث قائم الزاوية. (د) مثلثين متساويي الساقين.

٢ أكمل ما يأتى :

١ مكعب مساحة أحد أوجهه ٢٥ سم^{٢} فإن حجمه = ... سم^{٣}

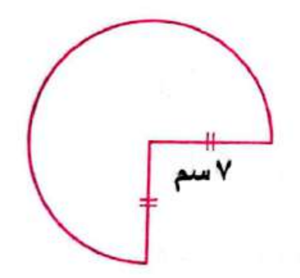
٢ متوازى مستطيلات حجمه ٤٨ سم^{٣} ، إذا كان طول قاعدته ٦ سم وعرضها ٤ سم فإن ارتفاعه = ... سم.

٣ الزاوية التى قياسها ٨٩° هى زاوية ....

٤ إذا كان : ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب) ، ∠ أ تتمم ∠ ب فإن : ق (∠ أ) = ...°

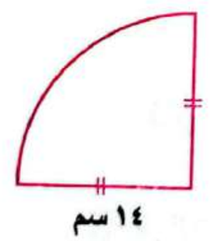
٥ مساحة الشكل المقابل

تساوى .... سم^{٢} $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$



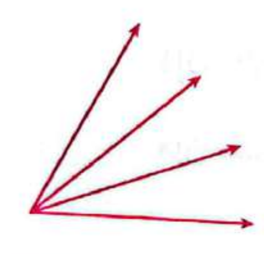
٦ محيط الشكل المقابل

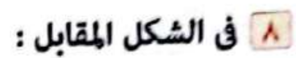
يساوى .... سم $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$



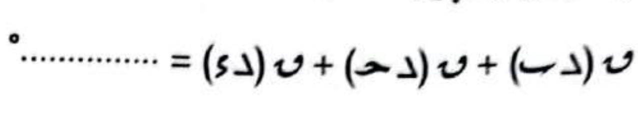
٧ عدد الزوايا الحادة الموجودة

فى الشكل المقابل هو ....

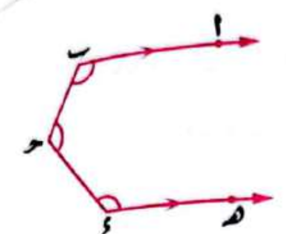




٨ في الشكل المقابل :

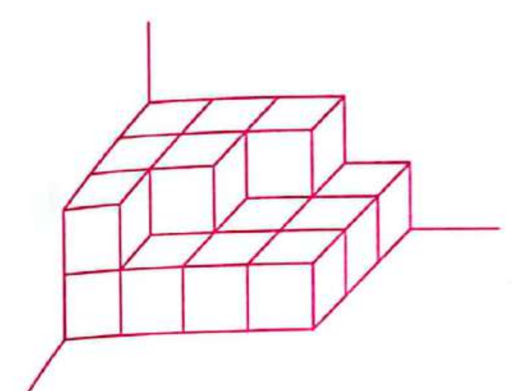


ق (∠ب) + ق (∠جـ) + ق (∠د) = ...°



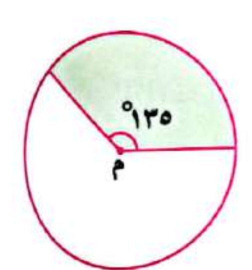
٩ حجم الشكل المقابل

يساوى .... وحدة مكعبة.



١٠ النسبة المئوية لمساحة الجزء المظلل

إلى مساحة الدائرة هى ....



١١ في الشكل المقابل :

إذا كان : Δ ا ب جـ ≡ Δ ا ب د

وكان محيط الشكل ا جـ ب د = ٢٠ سم.

، ا ب = ٦ سم.

فإن : محيط Δ ا ب جـ = ... سم



١٢ في الشكل المقابل :

ا ب جـ د مربع مساحته ٤٩ سم٢

فإذا كان : هـ جـ = ١٥ سم

فإن مساحة Δ ا ب هـ = ... سم٢

